

Mathématiques

Baccalauréat général 2024 — épreuve de spécialité

Métropole, mercredi 19 juin 2024 (24-MATJ1ME1)

Corrigé

Quatre exercices

Exercice 1

Sujet — Exercice 1 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x e^{-x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Affirmation 1 : L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Affirmation 2 : La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5e^{-x}$.

2. On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) , telles que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1 .

Affirmation 3 : La suite (v_n) converge vers un nombre réel l appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$.

On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n , on a alors : $u_0 \leq v_n \leq w_0$.

Corrigé

1. Affirmation 1 : VRAIE.

L'axe des abscisses a pour équation $y = 0$. D'après le cours, la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ dès que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Étudions la limite de f en $+\infty$. Pour tout réel x , comme $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$:

$$f(x) = 5x e^{-x} = \frac{5x}{e^x} = 5 \times \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \quad (x \neq 0).$$

D'après le théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; par passage à l'inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, puis par produit par 5 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses. L'affirmation 1 est **vraie**.

Remarque. En $-\infty$, la situation est différente : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ (car $-x \rightarrow +\infty$), donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; la courbe n'a pas d'asymptote en $-\infty$. Cela ne contredit pas l'affirmation : une droite est asymptote à la courbe dès qu'elle l'est d'un côté. *Ce que le correcteur attend :* la forme indéterminée « $\infty \times 0$ » en $+\infty$ ($5x \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow 0$) doit être levée par le théorème de croissances comparées, nommé ; écrire simplement « e^{-x} tend vers 0 donc $f(x)$ tend vers 0 » n'est pas une justification.

Affirmation 2 : VRAIE.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de la fonction $x \mapsto 5x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et de la fonction $x \mapsto e^{-x}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ (de la forme e^u avec $u(x) = -x$, de dérivée $u'(x)e^{u(x)} = -e^{-x}$). Posons $u(x) = 5x$ et $v(x) = e^{-x}$: alors $u'(x) = 5$ et $v'(x) = -e^{-x}$. D'après la formule de dérivation d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, pour tout réel x :

$$f'(x) = 5e^{-x} + 5x \times (-e^{-x}) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} = 5(1-x)e^{-x}.$$

Calculons alors $f'(x) + f(x)$ pour tout réel x :

$$f'(x) + f(x) = (5e^{-x} - 5xe^{-x}) + 5xe^{-x} = 5e^{-x}.$$

Ainsi $f' + f = 5e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$: la fonction f est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$. L'affirmation 2 est **vraie**.

Remarque. L'équation (E) s'écrit $y' = -y + 5e^{-x}$: c'est une équation de la forme $y' = ay + \varphi$ avec $a = -1$. D'après le cours, ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x} + f(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$, puisque f en est une solution particulière et que les solutions de l'équation homogène $y' = -y$ sont les $x \mapsto Ce^{-x}$.

2. Affirmation 3 : FAUSSE.

Les hypothèses ne suffisent pas à garantir la convergence de (v_n) : le théorème des gendarmes exige que les deux suites encadrantes convergent vers la *même* limite, ce qui n'est pas le cas ici ($-1 \neq 1$). Donnons un contre-exemple explicite. Posons, pour tout entier naturel n :

$$u_n = -1, \quad v_n = (-1)^n, \quad w_n = 1.$$

- Pour tout n , $(-1)^n$ vaut 1 (si n est pair) ou -1 (si n est impair) ; dans les deux cas, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, c'est-à-dire $u_n \leq v_n \leq w_n$;
- la suite (u_n) est constante égale à -1 , donc converge vers -1 ; la suite (w_n) est constante égale à 1 , donc converge vers 1 .

Toutes les hypothèses de l'énoncé sont donc satisfaites. Or la suite $(v_n) = ((-1)^n)$ ne converge pas : ses termes valent alternativement 1 et -1 , de sorte qu'aucun intervalle ouvert de longueur inférieure à 2 (par exemple $]l - 0,5 ; l + 0,5[$, quel que soit le réel l) ne peut contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : la suite (v_n) n'a pas de limite. L'affirmation 3 est **fausse**.

Ce que le correcteur attend : un contre-exemple *explicite*, dont on vérifie chacune des hypothèses (encadrement, limites de (u_n) et de (w_n)), et non la seule phrase « le théorème des gendarmes ne s'applique pas ». Notons que si la suite (v_n) convergeait vers un réel l , alors on aurait bien $-1 \leq l \leq 1$ par passage à la limite dans les inégalités ; ce qui est faux dans l'affirmation, c'est l'existence de cette limite.

Affirmation 4 : VRAIE.

Montrons d'abord que, pour tout entier naturel n , $u_0 \leq u_n$. Soit $P(n)$ la propriété « $u_0 \leq u_n$ ».

- *Initialisation* : $u_0 \leq u_0$, donc $P(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : soit k un entier naturel tel que $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_0 \leq u_k$. La suite (u_n) étant croissante, $u_k \leq u_{k+1}$. Donc $u_0 \leq u_k \leq u_{k+1}$, et $P(k+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : la propriété est initialisée et héréditaire ; par récurrence, $u_0 \leq u_n$ pour tout entier naturel n .

De la même façon, la suite (w_n) étant décroissante, on a $w_{k+1} \leq w_k$ pour tout k , et la même récurrence (avec la propriété « $w_n \leq w_0$ ») donne $w_n \leq w_0$ pour tout entier naturel n .

En combinant avec l'encadrement de l'énoncé, on obtient pour tout entier naturel n :

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq w_0,$$

et en particulier $u_0 \leq v_n \leq w_0$. L'affirmation 4 est **vraie**.

Remarque. Les hypothèses de convergence ne servent pas ici : l'affirmation ne repose que sur la monotonie de (u_n) et de (w_n) . On peut en revanche en tirer un complément : une suite croissante convergeant vers -1 a tous ses termes inférieurs ou égaux à -1 (si l'un d'eux dépassait -1 , tous les suivants le dépasseraient aussi et la limite serait au moins égale à ce terme), et de même $w_n \geq 1$ pour tout n ; la suite (v_n) est donc bien bornée, sans pour autant converger (affirmation 3).

Ce que le correcteur attend : la chaîne d'inégalités complète $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq w_0$, chaque maillon justifié (croissance de (u_n) , hypothèse de l'énoncé, décroissance de (w_n)).

Exercice 2

Sujet — Exercice 2 — 5 points

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30 % des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

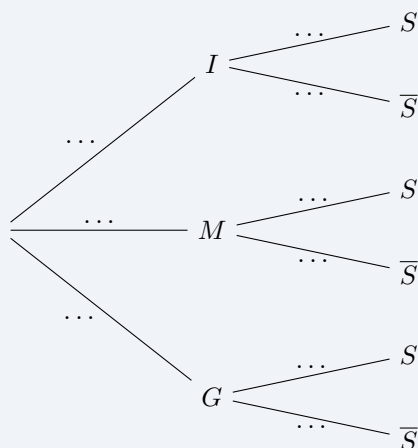
- 75 % pour les clients sur internet ;
- 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80 % pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

On définit les événements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un événement quelconque, on notera $\bar{A}$ son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.



1. Reproduire et compléter l'arbre ci-dessus.
2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.
3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.
4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

5.a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

5.b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

7. Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.

Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2 .

La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :

- l'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
- l'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

7.a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T .

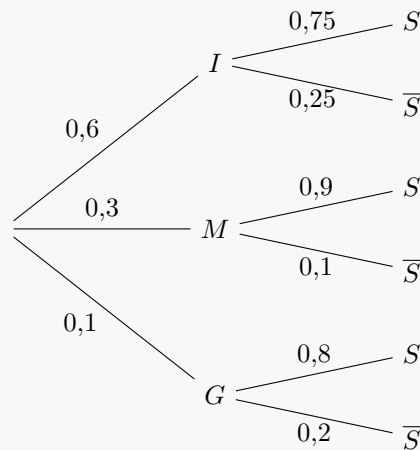
7.b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

Corrigé

1. Le client est choisi au hasard : les pourcentages de l'énoncé sont des probabilités. Les parts de marché donnent les probabilités des trois lieux d'achat, qui forment une partition de l'univers (un achat est réalisé sur un seul des trois canaux) :

$$P(I) = 0,6, \quad P(M) = 0,3, \quad P(G) = 0,1 \quad (\text{on vérifie que } 0,6 + 0,3 + 0,1 = 1).$$

Les taux de satisfaction sont des probabilités *conditionnelles*, « sachant le lieu d'achat » : $P_I(S) = 0,75$, $P_M(S) = 0,9$ et $P_G(S) = 0,8$. La somme des probabilités des deux branches issues d'un même nœud vaut 1, d'où $P_I(\bar{S}) = 1 - 0,75 = 0,25$, $P_M(\bar{S}) = 1 - 0,9 = 0,1$ et $P_G(\bar{S}) = 1 - 0,8 = 0,2$.



2. L'événement « le client a réalisé son achat sur internet et est satisfait du service clientèle » est $I \cap S$. La probabilité d'un chemin de l'arbre est le produit des probabilités de ses branches :

$$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45.$$

3. Les événements I , M et G forment une partition de l'univers : ils sont deux à deux incompatibles et leur réunion est l'univers tout entier. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S) = P(I) P_I(S) + P(M) P_M(S) + P(G) P_G(S).$$

Numériquement :

$$P(S) = 0,6 \times 0,75 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8 = 0,45 + 0,27 + 0,08 = 0,80.$$

On a bien $P(S) = 0,8$.

Ce que le correcteur attend : la formule des probabilités totales écrite avec ses trois termes (et la mention de la partition), avant le calcul numérique.

4. On sait que le client est satisfait : on cherche la probabilité conditionnelle $P_S(I)$. Par définition de la probabilité conditionnelle (avec $P(S) = 0,8 \neq 0$) :

$$P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0,45}{0,8} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16} = 0,5625.$$

Sachant que le client est satisfait, la probabilité qu'il ait acheté sur internet est $\frac{9}{16} = 0,5625$, soit environ 0,563 à 10^{-3} près (la valeur exacte étant à égale distance de 0,562 et de 0,563, ces deux arrondis sont à 10^{-3} près).

Ce que le correcteur attend : ne pas confondre $P_S(I)$, demandé ici, avec $P_I(S) = 0,75$ lu sur l'arbre ; l'arbre donne les probabilités conditionnelles « sachant le lieu d'achat », et la question renverse le conditionnement.

5.a. On répète 30 fois l'épreuve « contacter un client et noter s'il est satisfait ». Chaque contact est une épreuve de Bernoulli, dont le succès est « le client est satisfait », de probabilité $p = P(S) = 0,8$ d'après la question 3. Le choix des 30 clients est assimilé à un tirage avec remise : les 30 épreuves sont identiques et indépendantes. On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 30$ et $p = 0,8$, et la variable aléatoire X , qui compte le nombre de succès, suit la loi binomiale

$$X \sim \mathcal{B}(30; 0,8).$$

Ce que le correcteur attend : les trois ingrédients : deux issues (succès/échec), répétition à l'identique, indépendance (justifiée par le tirage avec remise), puis les deux paramètres.

5.b. On cherche $P(X \geq 25)$. En passant par l'événement contraire :

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24).$$

La calculatrice donne, pour la loi $\mathcal{B}(30; 0,8)$, $P(X \leq 24) \approx 0,5725$, d'où

$$P(X \geq 25) \approx 1 - 0,5725 = 0,4275 \approx 0,428.$$

On peut aussi sommer les six termes $P(X = k) = \binom{30}{k} 0,8^k 0,2^{30-k}$ pour k allant de 25 à 30 : environ $0,1723 + 0,1325 + 0,0785 + 0,0337 + 0,0093 + 0,0012 \approx 0,4275$. La probabilité qu'au moins 25 clients sur 30 soient satisfaits est d'environ 0,428.

6. Soit n un entier naturel non nul, taille de l'échantillon contacté. Par le même raisonnement qu'en 5.a, la variable aléatoire Y_n qui compte le nombre de clients satisfaits parmi les n contactés suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,8)$. L'événement « au moins l'un des clients n'est pas satisfait » est le contraire de « tous les clients sont satisfaits », c'est-à-dire de $\{Y_n = n\}$. Or

$$P(Y_n = n) = \binom{n}{n} 0,8^n 0,2^0 = 0,8^n,$$

donc la probabilité cherchée vaut $1 - 0,8^n$. On veut résoudre l'inéquation

$$1 - 0,8^n > 0,99 \iff 0,8^n < 0,01.$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$, cette inéquation équivaut à $\ln(0,8^n) < \ln(0,01)$, soit $n \ln(0,8) < \ln(0,01)$. Comme $0 < 0,8 < 1$, on a $\ln(0,8) < 0$: en divisant par ce nombre strictement négatif, le sens de l'inégalité change :

$$n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx \frac{-4,605}{-0,2231} \approx 20,64.$$

Le plus petit entier naturel vérifiant cette condition est $n = 21$. On vérifie : $0,8^{20} \approx 0,0115 > 0,01$ tandis que $0,8^{21} \approx 0,0092 < 0,01$. Il faut donc contacter au minimum 21 clients.

Ce que le correcteur attend : le passage par l'événement contraire, la résolution avec $\ln$ et le *changement de sens* de l'inégalité lors de la division par $\ln(0,8) < 0$; une réponse obtenue par tâtonnement à la calculatrice ne répond pas à la consigne « en résolvant une inéquation ».

7.a. Par linéarité de l'espérance (valable sans hypothèse d'indépendance) :

$$E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7.$$

Les variables T_1 et T_2 étant *indépendantes*, la variance de leur somme est la somme de leurs variances :

$$V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3.$$

Le temps de livraison a pour espérance 7 jours et pour variance 3.

7.b. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable T , d'espérance $E(T) = 7$ et de variance $V(T) = 3$: pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$P(|T - 7| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T)}{\varepsilon^2}.$$

Avec $\varepsilon = 3$:

$$P(|T - 7| \geq 3) \leq \frac{3}{3^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

d'où, en passant à l'événement contraire :

$$P(|T - 7| < 3) = 1 - P(|T - 7| \geq 3) \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Or $|T - 7| < 3 \iff -3 < T - 7 < 3 \iff 4 < T < 10$. Les variables T_1 et T_2 prennent des valeurs entières (des nombres entiers de jours), donc $T = T_1 + T_2$ est aussi à valeurs entières : pour un entier T , la condition $4 < T < 10$ équivaut à $5 \leq T \leq 9$. Ainsi

$$P(5 \leq T \leq 9) = P(4 < T < 10) = P(|T - 7| < 3) \geq \frac{2}{3}.$$

La probabilité que le client reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est bien supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

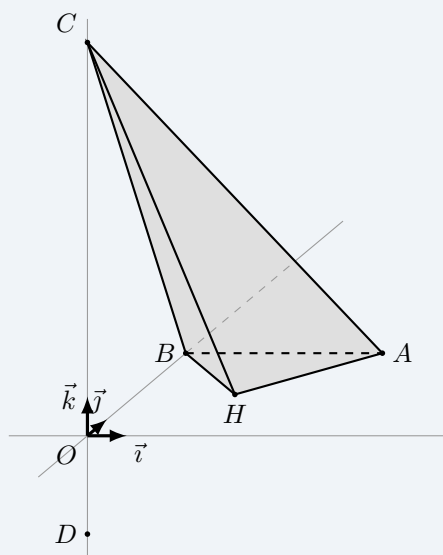
Ce que le correcteur attend : le choix $\varepsilon = 3$ (l'intervalle $[5; 9]$ est centré sur l'espérance 7), le passage à l'événement contraire, et surtout l'argument « T est à valeurs entières » qui permet de remplacer l'intervalle ouvert $]4; 10[$ par l'intervalle fermé $[5; 9]$: sans lui, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne donne qu'une minoration de $P(4 < T < 10)$, événement a priori plus large que celui demandé.

Exercice 3

Sujet — Exercice 3 — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(5; 5; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(0; 0; 10)$ et $D\left(0; 0; -\frac{5}{2}\right)$.



1.a. Montrer que $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD) .

1.b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

2. On considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

2.a. On admet que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H . Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$.

2.b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD) .

3.a. Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H .

3.b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

4.a. Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C .

4.b. En déduire le volume du tétraèdre $ABCH$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B . Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC) .

Corrigé

1.a. Calculons les coordonnées de deux vecteurs du plan (CAD) :

$$\vec{CA} = \begin{pmatrix} 5-0 \\ 5-0 \\ 0-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ -\frac{5}{2}-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{25}{2} \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : la première coordonnée de $\vec{CD}$ est nulle alors que celle de $\vec{CA}$ vaut $5 \neq 0$, donc aucun réel k ne vérifie $\vec{CA} = k\vec{CD}$. Les points C , A et D ne sont donc pas alignés et définissent bien un plan. Le repère étant orthonormé, calculons les produits scalaires :

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{CA} &= 1 \times 5 + (-1) \times 5 + 0 \times (-10) = 5 - 5 + 0 = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{CD} &= 1 \times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times \left(-\frac{25}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{n}_1$, non nul, est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD) : c'est un vecteur normal au plan (CAD) .

Ce que le correcteur attend : les deux produits scalaires calculés et la non-colinéarité des deux vecteurs : un vecteur orthogonal à deux vecteurs colinéaires n'a aucune raison d'être normal au plan.

1.b. D'après le cours, un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Avec $\vec{n}_1(1; -1; 0)$, le plan (CAD) a une équation de la forme

$$x - y + d = 0.$$

Le point $C(0; 0; 10)$ appartient à ce plan, donc $0 - 0 + d = 0$, soit $d = 0$. Le plan (CAD) a pour équation cartésienne $x - y = 0$. On vérifie avec les deux autres points : $A(5; 5; 0) : 5 - 5 = 0$; $D\left(0; 0; -\frac{5}{2}\right) : 0 - 0 = 0$. Les trois points vérifient bien l'équation.

2.a. Un point de $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}t; 5 - \frac{5}{2}t; 0\right)$ pour un certain réel t . Il appartient au plan (CAD) si et seulement si ses coordonnées vérifient $x - y = 0$:

$$\frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0 \iff \frac{5}{2}t - 5 + \frac{5}{2}t = 0 \iff 5t = 5 \iff t = 1.$$

Cette équation a une unique solution, ce qui confirme que $\mathcal{D}$ et (CAD) sont sécants en un seul point H , obtenu pour $t = 1$:

$$H\left(\frac{5}{2} \times 1; 5 - \frac{5}{2} \times 1; 0\right) = H\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right).$$

2.b. D'après le cours, le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD) est le point d'intersection de ce plan avec la droite passant par B et orthogonale à (CAD) . Il suffit donc de vérifier deux choses : que H appartient à (CAD) , et que la droite (BH) est orthogonale à (CAD) .

— $H \in (CAD)$: c'est la question 2.a ($\frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$).

— Calculons $\vec{BH}$:

$$\vec{BH} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 0 \\ \frac{5}{2} - 5 \\ \frac{5}{2} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \vec{n}_1.$$

Le vecteur $\vec{BH}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}_1$: la droite (BH) est orthogonale au plan (CAD) .

Le point H est donc le point d'intersection de (CAD) avec la droite passant par B et orthogonale à (CAD) : H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD) .

Remarque. On pouvait aussi observer que la droite $\mathcal{D}$ passe par B (pour $t = 0$, on obtient $(0; 5; 0)$) et a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \vec{n}_1$: $\mathcal{D}$ est précisément la droite passant par B et orthogonale à (CAD) , et $H = \mathcal{D} \cap (CAD)$ en est le projeté orthogonal.

3.a. Calculons les vecteurs $\vec{HA}$ et $\vec{HB}$:

$$\vec{HA} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{5}{2} \\ 5 - \frac{5}{2} \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{HB} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{5}{2} \\ 5 - \frac{5}{2} \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Leur produit scalaire vaut

$$\vec{HA} \cdot \vec{HB} = \frac{5}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} + 0 \times 0 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{4} = 0.$$

Les vecteurs $\vec{HA}$ et $\vec{HB}$ sont orthogonaux (et non nuls) : le triangle ABH est rectangle en H .

Remarque. C'est aussi une conséquence directe de la question 2.b : la droite (BH) est orthogonale au plan (CAD) , donc à toute droite de ce plan passant par H , en particulier à (HA) puisque $A \in (CAD)$.

3.b. Le triangle ABH étant rectangle en H , son aire est $\frac{1}{2} \times HA \times HB$. Le repère étant orthonormé :

$$HA = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

D'où

$$\mathcal{A}_{ABH} = \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{25 \times 2}{4} = \frac{25}{4}.$$

L'aire du triangle ABH est bien égale à $\frac{25}{4}$ (unités d'aire).

4.a. La hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C est la droite passant par C et orthogonale au plan de la face opposée, c'est-à-dire au plan (ABH) . Les points A , B et H ont tous une cote nulle : ils appartiennent au plan d'équation $z = 0$. Ils ne sont pas alignés (d'après 3.a, $\vec{HA}$ et $\vec{HB}$ sont orthogonaux et non nuls, donc non colinéaires), donc le plan (ABH) est

exactement le plan d'équation $z = 0$, dont un vecteur normal est $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (coefficients de l'équation $0x + 0y + 1z = 0$).

Or

$$\vec{CO} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = -10 \vec{k} :$$

le vecteur $\vec{CO}$ est colinéaire à $\vec{k}$, vecteur normal au plan (ABH) . La droite (CO) est donc orthogonale au plan (ABH) et passe par C : c'est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C . De plus, $O(0;0;0)$ vérifie $z=0$, donc O appartient au plan (ABH) : le point O est le pied de cette hauteur.

4.b. Prenons pour base du tétraèdre la face ABH , d'aire $\mathcal{B} = \frac{25}{4}$ (question 3.b). La hauteur relative à cette base est la longueur CO (question 4.a) :

$$h = CO = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-10)^2} = 10.$$

D'après la formule rappelée :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} h = \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 = \frac{250}{12} = \frac{125}{6}.$$

Le volume du tétraèdre $ABCH$ est $\frac{125}{6}$ unités de volume, soit environ 20,83.

5. Le volume d'un tétraèdre ne dépend pas de la face choisie comme base : calculons-le une seconde fois en prenant pour base la face ABC . La hauteur relative à cette base est alors la distance du sommet H au plan (ABC) , notée d .

Le triangle ABC est rectangle en B (admis) ; calculons ses côtés de l'angle droit :

$$AB = \sqrt{(0-5)^2 + (5-5)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$BC = \sqrt{(0-0)^2 + (0-5)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

Son aire vaut donc

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times 5 \times 5\sqrt{5} = \frac{25\sqrt{5}}{2}.$$

En écrivant le volume avec cette base :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times d \iff \frac{125}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{25\sqrt{5}}{2} \times d = \frac{25\sqrt{5}}{6} d,$$

d'où

$$d = \frac{125}{6} \times \frac{6}{25\sqrt{5}} = \frac{125}{25\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}.$$

La distance du point H au plan (ABC) est $\sqrt{5}$, soit environ 2,24.

Vérification (hors de la démarche demandée). On peut retrouver ce résultat avec une équation du plan (ABC) . Un vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ normal à (ABC) vérifie $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{BC} = 0$ avec $\vec{AB}(-5;0;0)$ et $\vec{BC}(0;-5;10)$, soit $-5a = 0$ et $-5b + 10c = 0$: on peut prendre $\vec{n}(0;2;1)$. Le plan (ABC) a alors une équation $2y + z + d' = 0$, et $B(0;5;0)$ donne $d' = -10$: $(ABC) : 2y + z - 10 = 0$ (on vérifie : $A : 10 + 0 - 10 = 0$; $C : 0 + 10 - 10 = 0$). La formule de la distance d'un point à un plan donne

$$d(H, (ABC)) = \frac{\left| 2 \times \frac{5}{2} + 0 - 10 \right|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5},$$

ce qui confirme le résultat.

Ce que le correcteur attend : la consigne « déduire des questions précédentes » impose la méthode du double calcul de volume (le volume de 4.b, la base ABC dont l'aire se calcule grâce à l'angle droit admis) ; la formule de la distance d'un point à un plan n'est qu'un contrôle.

Exercice 4

Sujet — Exercice 4 — 6 points

Partie A : étude de la fonction f . La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1.a. Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.

1.b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.

1.c. Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

1.d. Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$.

2.a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1; 2]$.

2.b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.

2.c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g . La fonction g est définie sur $]0; 1]$ par

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; 1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0; 1]$ puis vérifier que $g'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2.a. Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0; \frac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

2.b. On admet le tableau de signes suivant :

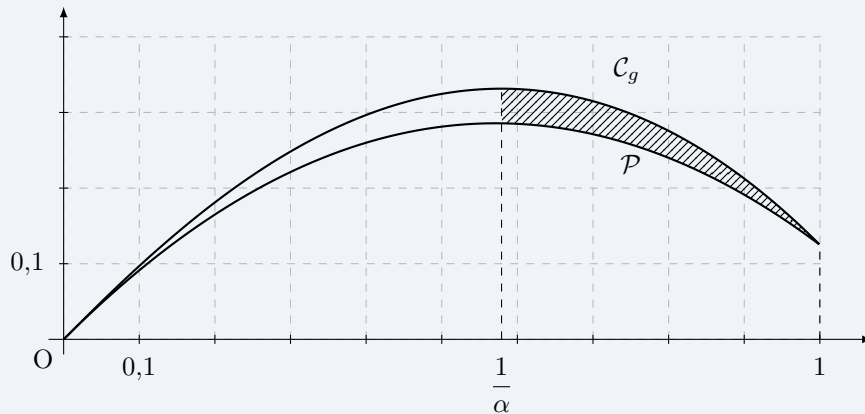
x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	+	0	-

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0; 1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire. On a représenté sur le graphique ci-dessous :

— la courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g ;

— la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0; 1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

1.a. Justifier la position relative des courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]0; 1]$.

1.b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}.$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathcal{A}$.

Corrigé

Partie A : étude de la fonction f . **1.a.** *Limite en 0.* Lorsque $x \rightarrow 0$ (par valeurs supérieures, puisque f est définie sur $]0; +\infty[$) : $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 2) = -2$ et, d'après les limites de référence du cours, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \ln x = -\infty$. Par somme :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

La courbe de f admet donc l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

Limite en $+\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln x = +\infty$. Par somme (il n'y a pas de forme indéterminée) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

1.b. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de la fonction affine $x \mapsto x - 2$ et de $\frac{1}{2} \ln$. La dérivée de $x \mapsto x - 2$ est 1 et celle de $\ln$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$, donc pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}.$$

1.c. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $2x > 0$ et $2x + 1 > 1 > 0$: le quotient $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$ est strictement positif. La fonction f est donc **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$. Avec les limites de la question 1.a :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

1.d. La fonction f' est dérivable sur $]0; +\infty[$: $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$ et la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, donc pour tout $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}.$$

Comme $x^2 > 0$, on a $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. D'après la caractérisation de la convexité pour une fonction deux fois dérivable, la fonction f est **concave** sur $]0; +\infty[$ (sa courbe est située au-dessous de chacune de ses tangentes). La dérivée seconde ne s'annulant jamais, la courbe n'a pas de point d'inflexion.

2.a. Sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

- f est continue (elle est dérivable) ;
- f est strictement croissante (question 1.c) ;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (question 1.a), et 0 est compris entre ces deux limites.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), étendu à l'intervalle ouvert $]0; +\infty[$ en remplaçant les valeurs aux bornes par les limites, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution α dans $]0; +\infty[$.

Localisons α :

$$f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2} \ln 1 = -1 + 0 = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,35 > 0.$$

Comme f est continue et strictement croissante sur $[1; 2]$ avec $f(1) < 0 < f(2)$, la solution α appartient à $[1; 2]$ (et même à $]1; 2[$, puisque $f(1)$ et $f(2)$ sont non nuls). À la calculatrice, $f(1,72) \approx -0,009 < 0$ et $f(1,73) \approx 0,004 > 0$, donc $1,72 < \alpha < 1,73$: $\alpha \approx 1,73$.

Ce que le correcteur attend : les trois hypothèses (continuité, stricte monotonie, encadrement de 0 par les limites) et le nom du théorème ; l'existence vient du théorème des valeurs intermédiaires, l'unicité de la stricte croissance.

2.b. La fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et s'annule en α . Donc :

- si $0 < x < \alpha$, alors $f(x) < f(\alpha) = 0$;
- si $x = \alpha$, alors $f(x) = 0$;
- si $x > \alpha$, alors $f(x) > f(\alpha) = 0$.

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

2.c. Par définition de α , $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire

$$\alpha - 2 + \frac{1}{2} \ln(\alpha) = 0 \iff \frac{1}{2} \ln(\alpha) = 2 - \alpha \iff \ln(\alpha) = 2(2 - \alpha).$$

On a bien $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g . **1.** La fonction g est dérivable sur $]0; 1[$ (admis). Dérivons terme à terme : la dérivée de $-\frac{7}{8}x^2$ est $-\frac{7}{4}x$, celle de x est 1. Pour le dernier terme,

posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = \ln x$, de dérivées $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$; d'après la formule de dérivation d'un produit :

$$(x^2 \ln x)' = 2x \times \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x.$$

Donc, pour tout $x \in]0; 1]$:

$$g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}(2x \ln x + x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x - \frac{1}{4}x = 1 - 2x - \frac{1}{2}x \ln x.$$

Calculons par ailleurs $x f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \in]0; 1]$ (on a bien $\frac{1}{x} > 0$, donc $f\left(\frac{1}{x}\right)$ est défini) :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{2} \ln x$$

car $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$. En multipliant par x :

$$x f\left(\frac{1}{x}\right) = x \times \frac{1}{x} - 2x - \frac{1}{2}x \ln x = 1 - 2x - \frac{1}{2}x \ln x = g'(x).$$

On a bien vérifié que $g'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in]0; 1]$.

2.a. Soit $x \in \left]0; \frac{1}{\alpha}\right[$. La fonction inverse $t \mapsto \frac{1}{t}$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, donc

$$0 < x < \frac{1}{\alpha} \implies \frac{1}{x} > \frac{1}{1/\alpha} = \alpha.$$

D'après la question A.2.b, $f(t) > 0$ pour tout $t > \alpha$; avec $t = \frac{1}{x} > \alpha$, on obtient $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

Ce que le correcteur attend : le renversement de l'inégalité par la fonction inverse (décroissante) et le renvoi explicite au signe de f établi en partie A.

2.b. D'après la question 1, $g'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$, et $x > 0$ sur $]0; 1]$: le signe de $g'(x)$ est celui de $f\left(\frac{1}{x}\right)$, donné par le tableau admis. Remarquons que $\frac{1}{\alpha}$ appartient bien à $]0; 1[$, puisque $1 < \alpha < 2$ donne $\frac{1}{2} < \frac{1}{\alpha} < 1$. Ainsi $g'(x) > 0$ sur $\left]0; \frac{1}{\alpha}\right[$, $g'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ et $g'(x) < 0$ sur $\left]\frac{1}{\alpha}; 1\right]$.

La fonction g est donc strictement croissante sur $\left]0; \frac{1}{\alpha}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\alpha}; 1\right]$: elle atteint son maximum en $x = \frac{1}{\alpha}$.

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$\searrow$

Complément (non demandé). On a $g(1) = -\frac{7}{8} + 1 - 0 = \frac{1}{8}$ et, par croissances comparées,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$; la valeur du maximum est $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) \approx 0,33$, ce que confirme le graphique de la partie C.

Partie C : un calcul d'aire. 1.a. Notons $p(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x$ la fonction dont $\mathcal{P}$ est la courbe. Pour tout $x \in]0; 1]$:

$$g(x) - p(x) = \left(-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x\right) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2 \ln x.$$

Or $x^2 > 0$ et, pour $0 < x \leq 1$, $\ln x \leq 0$ (avec $\ln x < 0$ si $x < 1$ et $\ln 1 = 0$). Donc $-\frac{1}{4}x^2 \ln x \geq 0$, c'est-à-dire $g(x) \geq p(x)$, l'égalité n'ayant lieu qu'en $x = 1$. La courbe $\mathcal{C}_g$ est donc **au-dessus** de la parabole $\mathcal{P}$ sur $]0; 1]$, les deux courbes se rejoignant au point d'abscisse 1 (où $g(1) = p(1) = \frac{1}{8}$), ce que confirme le graphique.

1.b. Calculons $I = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx$ par intégration par parties. Posons

$$\begin{cases} u'(x) = x^2 & \implies u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v(x) = \ln x & \implies v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[\frac{1}{\alpha}; 1\right]$ et leurs dérivées u' et v' y sont continues. D'après la formule d'intégration par parties :

$$I = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 - \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 - \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \, dx.$$

Le crochet vaut, puisque $\ln 1 = 0$ et $\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\ln \alpha$:

$$\left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 = \frac{1}{3} \ln 1 - \frac{1}{3\alpha^3} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 + \frac{\ln \alpha}{3\alpha^3} = \frac{\ln \alpha}{3\alpha^3}.$$

L'intégrale restante se calcule avec la primitive $\frac{x^3}{3}$ de x^2 :

$$\frac{1}{3} \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\alpha^3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9\alpha^3}.$$

D'où

$$I = \frac{\ln \alpha}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3}.$$

Utilisons maintenant la relation rappelée $\ln \alpha = 2(2 - \alpha) = 4 - 2\alpha$:

$$\frac{\ln \alpha}{3\alpha^3} = \frac{4 - 2\alpha}{3\alpha^3} = \frac{3(4 - 2\alpha)}{9\alpha^3} = \frac{12 - 6\alpha}{9\alpha^3}.$$

En réduisant au même dénominateur $9\alpha^3$ (avec $\frac{1}{9} = \frac{\alpha^3}{9\alpha^3}$) :

$$I = \frac{12 - 6\alpha}{9\alpha^3} - \frac{\alpha^3}{9\alpha^3} + \frac{1}{9\alpha^3} = \frac{12 - 6\alpha - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}.$$

On a bien démontré l'égalité

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}.$$

Contrôle du signe. Sur $\left[\frac{1}{\alpha}; 1\right] \subset]0; 1]$, la fonction $x \mapsto x^2 \ln x$ est négative, donc $I \leq 0$; avec $\alpha \approx 1,727$, on trouve $-\alpha^3 - 6\alpha + 13 \approx -2,51 < 0$, ce qui est cohérent ($I \approx -0,054$).

Ce que le correcteur attend : le choix « on dérive $\ln x$, on primitive x^2 » (l'autre choix ne simplifie rien), le crochet évalué avec $\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\ln \alpha$, puis l'usage de la relation $\ln \alpha = 2(2 - \alpha)$ pour faire disparaître le logarithme.

2. D'après la question 1.a, sur $\left[\frac{1}{\alpha}; 1\right]$ la courbe $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{P}$: l'aire du domaine compris entre les deux courbes et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$ est, en unités d'aire, l'intégrale de la différence $g - p$, fonction continue et positive sur cet intervalle :

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 (g(x) - p(x)) \, dx = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln x\right) \, dx = -\frac{1}{4} \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx$$

par linéarité de l'intégrale. D'après la question 1.b :

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}.$$

L'aire du domaine hachuré est $\mathcal{A} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}$ unités d'aire, soit, avec $\alpha \approx 1,727$, environ 0,0135 unité d'aire (une unité d'aire est ici le carré de côté 1, soit 100 carreaux du quadrillage : le domaine hachuré vaut environ 1,35 carreau, ce qui est cohérent avec sa taille sur le graphique).

Ce que le correcteur attend : la position relative (question 1.a) invoquée pour écrire l'aire comme $\int (g - p)$ et non $\int (p - g)$, et une aire finale *positive*.