

Mathématiques

Baccalauréat général 2024 — épreuve de spécialité

Métropole, jeudi 20 juin 2024 (24-MATJ2ME2)

Corrigé

Quatre exercices

Exercice 1

Sujet — Exercice 1 — 5 points

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

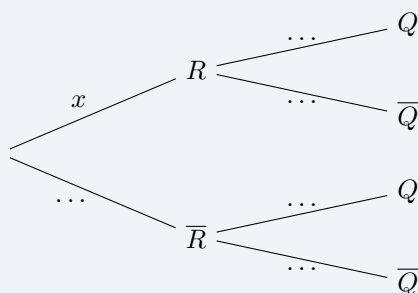
- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

On note R l'événement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'événement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

Pour un événement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\bar{A}$ son événement contraire. Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$.
2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
- 2.a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



- 2.b. Montrer que $x = 0,9$.
3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?
4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20; 0,615)$. La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?
5. On interroge au hasard dix étudiants.

Les variables aléatoires $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20; 0,615)$.

Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$.

Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S .

6. On considère la variable aléatoire $M = \frac{S}{10}$.

6.a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?

6.b. Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.

6.c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.

« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

Corrigé

1. L'énoncé indique que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui » : c'est la probabilité de l'événement Q pour un étudiant choisi au hasard, donc

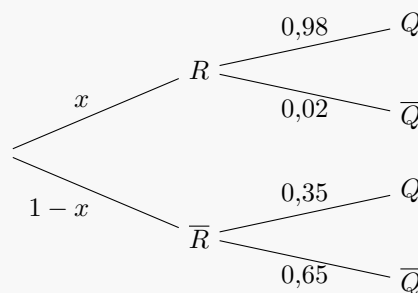
$$P(Q) = 0,917.$$

La donnée « 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu non » porte sur la sous-population des étudiants ayant échoué (événement $\bar{R}$) : c'est une probabilité conditionnelle, celle de $\bar{Q}$ sachant $\bar{R}$. Ainsi

$$P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65.$$

De même, « 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu oui » se traduit par $P_R(Q) = 0,98$.

2.a. On complète l'arbre à l'aide de la règle « la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1 » : $P(\bar{R}) = 1 - x$, $P_R(\bar{Q}) = 1 - 0,98 = 0,02$ et $P_{\bar{R}}(Q) = 1 - 0,65 = 0,35$.



2.b. Les événements R et $\bar{R}$ forment une partition de l'univers (un étudiant a réussi ou a échoué, jamais les deux). D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Q) = P(R \cap Q) + P(\bar{R} \cap Q) = P(R) \times P_R(Q) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(Q),$$

soit, avec les valeurs de l'arbre,

$$P(Q) = 0,98x + 0,35(1-x) = 0,98x + 0,35 - 0,35x = 0,63x + 0,35.$$

Or $P(Q) = 0,917$ d'après la question 1. On résout donc

$$0,63x + 0,35 = 0,917 \iff 0,63x = 0,567 \iff x = \frac{0,567}{0,63} = 0,9.$$

On a bien $x = 0,9$: 90 % des étudiants ont réussi l'examen.

Ce que le correcteur attend : la formule des probabilités totales écrite avec la partition $\{R, \overline{R}\}$ et l'équation résolue jusqu'au bout ; « montrer que $x = 0,9$ » n'autorise pas à remplacer x par 0,9 dans l'arbre pour vérifier que l'on retrouve 0,917, ce qui serait un raisonnement à l'envers.

3. On sait que l'étudiant a répondu « oui » : on cherche la probabilité conditionnelle $P_Q(R)$, à ne pas confondre avec $P_R(Q) = 0,98$ lue sur l'arbre. Par définition de la probabilité conditionnelle (on a bien $P(Q) = 0,917 \neq 0$), et avec la règle du produit le long du chemin R puis Q :

$$P_Q(R) = \frac{P(R \cap Q)}{P(Q)} = \frac{P(R) \times P_R(Q)}{P(Q)} = \frac{0,9 \times 0,98}{0,917} = \frac{0,882}{0,917} \approx 0,96183.$$

Sachant qu'il a répondu « oui », la probabilité que l'étudiant ait réussi l'examen est $P_Q(R) \approx 0,962$ (arrondie à 10^{-3}).

Ce que le correcteur attend : le renversement du conditionnement. L'arbre donne les probabilités « sachant R » ; la question demande « sachant Q », d'où le passage obligé par $P(R \cap Q)$ et $P(Q)$.

4. La variable aléatoire N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,615)$: pour tout entier k de 0 à 20, $P(N = k) = \binom{20}{k} 0,615^k 0,385^{20-k}$. Récompenser « à partir de la note k », c'est récompenser les étudiants dont la note vérifie $N \geq k$. La directrice veut récompenser les meilleurs, donc placer le seuil le plus haut possible tout en récompensant au moins 65 % des étudiants : on cherche le plus grand entier k tel que

$$P(N \geq k) \geq 0,65, \quad \text{c'est-à-dire} \quad P(N \leq k-1) \leq 0,35$$

puisque $P(N \geq k) = 1 - P(N \leq k-1)$. La calculatrice (fonction de répartition de la loi binomiale) donne les valeurs cumulées suivantes :

k	9	10	11	12
$P(N \leq k)$	0,100	0,203	0,351	0,529
$P(N \geq k)$	0,958	0,900	0,797	0,649

Ainsi

$$P(N \geq 11) = 1 - P(N \leq 10) \approx 1 - 0,203 = 0,797 \geq 0,65$$

et

$$P(N \geq 12) = 1 - P(N \leq 11) \approx 1 - 0,351 = 0,649 < 0,65.$$

La suite $(P(N \geq k))$ est décroissante en k (plus le seuil est élevé, moins d'étudiants le dépassent), donc le plus grand seuil qui garantit au moins 65 % de récompensés est $k = 11$.

Conclusion : la directrice doit attribuer les récompenses à partir de la note 11 ; environ 79,7 % des étudiants seront alors récompensés. Avec un seuil à 12, seuls 64,9 % d'entre eux le seraient, ce qui est (de peu) inférieur aux 65 % demandés.

Remarque. Aucun seuil entier ne donne exactement 65 % de récompensés : la question est donc ambiguë. Si on la lit « pour qu'environ 65 % des étudiants soient récompensés », le seuil dont le taux est le plus proche de 65 % est 12 (avec $P(N \geq 12) \approx 0,649$), et c'est la réponse retenue par une partie des corrigés publiés ; d'autres, lisant « au moins 65 % », retiennent 11 comme ci-dessus. Le correcteur accepte l'une ou l'autre réponse dès lors que les deux probabilités $P(N \geq 11) \approx 0,797$ et $P(N \geq 12) \approx 0,649$ figurent sur la copie et que le critère de choix est énoncé.

Ce que le correcteur attend : la traduction « à partir de la note k » $\Rightarrow P(N \geq k)$, puis le passage par $P(N \leq k-1)$ que fournit la calculatrice ; l'encadrement par les deux valeurs $k = 11$ et $k = 12$ justifie le choix du seuil.

5. Chaque variable N_i suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,615)$. D'après les indicateurs de la loi binomiale :

$$E(N_i) = np = 20 \times 0,615 = 12,3 \quad \text{et} \quad V(N_i) = np(1-p) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355.$$

Par **linéarité de l'espérance** (valable sans hypothèse d'indépendance) :

$$E(S) = E(N_1) + E(N_2) + \cdots + E(N_{10}) = 10 \times 12,3 = 123.$$

Les variables $N_1, \dots, N_{10}$ étant **indépendantes**, la variance de leur somme est la somme de leurs variances :

$$V(S) = V(N_1) + V(N_2) + \cdots + V(N_{10}) = 10 \times 4,7355 = 47,355.$$

Ainsi $E(S) = 123$ et $V(S) = 47,355$.

Ce que le correcteur attend : l'hypothèse d'indépendance doit être citée pour la variance (elle ne sert pas pour l'espérance).

6.a. La variable S est la somme des notes des dix étudiants interrogés ; en la divisant par leur nombre, $M = \frac{S}{10}$ modélise la **moyenne des notes** obtenues à l'examen par les dix étudiants interrogés au hasard. C'est la moyenne M_{10} d'un échantillon de taille 10 de la loi $\mathcal{B}(20; 0,615)$.

6.b. Pour tout réel a , $E(aX) = a E(X)$ et $V(aX) = a^2 V(X)$. Avec $a = \frac{1}{10}$:

$$E(M) = E\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{1}{10} E(S) = \frac{123}{10} = 12,3$$

et

$$V(M) = V\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{1}{10^2} V(S) = \frac{47,355}{100} = 0,47355.$$

On retrouve les formules de la moyenne d'un échantillon : $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{V}{n}$ avec $\mu = 12,3$, $V = 4,7355$ et $n = 10$.

6.c. La variable M admet une espérance $E(M) = 12,3$ et une variance $V(M) = 0,47355$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$P(|M - E(M)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(M)}{\varepsilon^2}.$$

L'affirmation porte sur l'événement « $10,3 < M < 14,3$ ». Or $10,3 = 12,3 - 2$ et $14,3 = 12,3 + 2$, donc

$$10,3 < M < 14,3 \iff -2 < M - 12,3 < 2 \iff |M - 12,3| < 2.$$

Appliquons l'inégalité avec $\varepsilon = 2$:

$$P(|M - 12,3| \geq 2) \leq \frac{0,47355}{2^2} = \frac{0,47355}{4} = 0,1183875.$$

L'événement « $|M - 12,3| < 2$ » est le contraire de « $|M - 12,3| \geq 2$ », donc

$$P(10,3 < M < 14,3) = 1 - P(|M - 12,3| \geq 2) \geq 1 - 0,1183875 = 0,8816125 \geq 0,8.$$

La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est donc supérieure ou égale à 0,88, et a fortiori d'au moins 80 % : l'affirmation est justifiée.

Ce que le correcteur attend : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev *major*e la probabilité de s'écarter de la moyenne (les « queues »), alors que l'affirmation *min*ore la probabilité d'en rester proche : le passage à l'événement contraire est l'étape clé. Il faut aussi identifier $\varepsilon = 2$ à partir des bornes 10,3 et 14,3, symétriques autour de 12,3, et noter que l'inégalité stricte « < 2 » correspond bien au contraire de « ≥ 2 ».

Exercice 2

Sujet — Exercice 2 — 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$. Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$. Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0,01 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0,3 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$.
2. Pour tout entier naturel n , on note v_n le taux de chlore, en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.
On admet que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,92 v_n + 0,3$.
- 2.a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.
- 2.b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.
4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s) :  
    n=0  
    v=0.7  
    while ... :  
        n= ...  
        v= ...  
    return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine. Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,08y + \frac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C e^{-0,08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

2.a. Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.

2.b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0,7 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$. On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de $2 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$. Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

Corrigé

Partie A : étude d'un modèle discret 1. Le taux de chlore est une masse de chlore par unité de volume d'eau, en milligrammes par litre. Convertissons les données dans ces unités : la piscine contient $50 \text{ m}^3 = 50 \times 1000 \text{ L} = 50\,000 \text{ L}$ d'eau, et l'on ajoute $15 \text{ g} = 15\,000 \text{ mg}$ de chlore. Comme ce chlore se mélange uniformément, l'augmentation du taux vaut

$$\frac{15\,000}{50\,000} = \frac{15}{50} = 0,3 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}.$$

Chaque ajout quotidien de 15 g fait donc augmenter le taux de $0,3 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$. (Le facteur $0,92$ de la relation de récurrence traduit, lui, la disparition de 8% du chlore chaque jour sous l'action du milieu ambiant.)

2.a. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$: « $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ » est vraie.

Initialisation. On a $v_0 = 0,7$ et $v_1 = 0,92 \times 0,7 + 0,3 = 0,644 + 0,3 = 0,944$. Comme $0,7 \leq 0,944 \leq 4$, la propriété $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit k un entier naturel tel que $P(k)$ soit vraie : $v_k \leq v_{k+1} \leq 4$. Montrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 4$.

Multiplions l'encadrement de l'hypothèse de récurrence par $0,92 > 0$, ce qui conserve le sens des inégalités :

$$0,92 v_k \leq 0,92 v_{k+1} \leq 0,92 \times 4 = 3,68.$$

Ajoutons $0,3$ à chaque membre :

$$0,92 v_k + 0,3 \leq 0,92 v_{k+1} + 0,3 \leq 3,68 + 0,3 = 3,98.$$

Or $0,92 v_k + 0,3 = v_{k+1}$ et $0,92 v_{k+1} + 0,3 = v_{k+2}$ d'après la relation de récurrence. Donc $v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 3,98 \leq 4$: la propriété $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, pour tout entier naturel n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

Ce que le correcteur attend : l'hérédité manipule l'encadrement entier $v_k \leq v_{k+1} \leq 4$ (et non seulement $v_k \leq 4$), en précisant que la multiplication par $0,92 > 0$ conserve les inégalités ; le majorant obtenu, $3,98$, est inférieur à 4 , ce qui clôt l'hérédité.

2.b. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $v_n \leq v_{n+1}$: la suite (v_n) est **croissante** ; et $v_{n+1} \leq 4$ pour tout n , donc (avec $v_0 = 0,7 \leq 4$) tous les termes vérifient $v_n \leq 4$: la suite est **majorée** par 4 . D'après le **théorème de convergence monotone**, une suite croissante et majorée converge : la suite (v_n) est convergente. Notons ℓ sa limite ; on a $0,7 \leq \ell \leq 4$.

Calcul de la limite. La suite vérifie $v_{n+1} = g(v_n)$ avec $g(x) = 0,92x + 0,3$, fonction affine donc continue sur $\mathbb{R}$. Comme (v_n) converge vers ℓ , la suite (v_{n+1}) converge aussi vers ℓ (c'est la

même suite décalée d'un rang) et, g étant continue en ℓ , la suite $(g(v_n))$ converge vers $g(\ell)$. Par unicité de la limite, ℓ est un point fixe de g :

$$\ell = 0,92\ell + 0,3 \iff 0,08\ell = 0,3 \iff \ell = \frac{0,3}{0,08} = \frac{30}{8} = 3,75.$$

La suite (v_n) converge vers 3,75.

Autre méthode (expression explicite). Posons $w_n = v_n - 3,75$. Alors $w_{n+1} = v_{n+1} - 3,75 = 0,92v_n + 0,3 - 3,75 = 0,92v_n - 3,45 = 0,92(v_n - 3,75) = 0,92w_n$: la suite (w_n) est géométrique de raison 0,92 et de premier terme $w_0 = 0,7 - 3,75 = -3,05$. Donc, pour tout n ,

$$v_n = 3,75 - 3,05 \times 0,92^n,$$

et comme $-1 < 0,92 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,92^n = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3,75$. Cette expression servira à la question 5.

Ce que le correcteur attend : deux temps bien distincts, l'existence de la limite (théorème de convergence monotone, hypothèses citées) puis sa valeur (point fixe de la fonction continue g) ; écrire « $\ell = 0,92\ell + 0,3$ » sans avoir établi la convergence ne prouve rien.

3. La suite (v_n) est croissante et converge vers 3,75. Par définition de la limite, l'intervalle ouvert $]3; 4[$, qui contient 3,75, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : il existe donc un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $v_n > 3$. À long terme, le taux de chlore dépasse $3 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$ et se rapproche de $3,75 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$, au-dessus du seuil maximal préconisé de $3 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$: le taux de chlore **ne sera pas conforme** à la préconisation des piscinistes. (L'ajout quotidien de 15 g est trop important.)

4. La fonction doit parcourir les termes de la suite tant que le seuil s n'est pas dépassé, et s'arrêter dès que $v_n > s$: la boucle continue donc tant que $v \leq s$ (le contraire de $v_n > s$). À chaque passage, on avance d'un rang (n augmente de 1) et l'on calcule le terme suivant par la relation de récurrence $v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3$.

```
def alerte_chlore(s) :
    n=0                # rang courant : v_0 = 0,7
    v=0.7
    while v <= s :      # tant que le seuil n'est pas depasse
        n = n + 1       # rang suivant
        v = 0.92 * v + 0.3 # v_{n+1} = 0,92 v_n + 0,3
    return n            # premier rang n tel que v_n > s
```

À la sortie de la boucle, la variable v contient v_n pour la valeur courante de n ; la condition $v \leq s$ vient d'échouer pour la première fois, donc $v_n > s$ alors que $v_{n-1} \leq s$: la fonction renvoie bien le plus petit entier n tel que $v_n > s$. Elle ne termine que si un tel entier existe (c'est le cas si $s < 3,75$, puisque (v_n) tend vers 3,75 en croissant ; pour $s \geq 3,75$, la boucle ne s'arrêterait jamais).

5. L'instruction `alerte_chlore(3)` renvoie le plus petit entier n tel que $v_n > 3$. Utilisons l'expression explicite $v_n = 3,75 - 3,05 \times 0,92^n$ obtenue à la question 2.b :

$$v_n > 3 \iff 3,75 - 3,05 \times 0,92^n > 3 \iff 3,05 \times 0,92^n < 0,75 \iff 0,92^n < \frac{0,75}{3,05}.$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et $\ln(0,92) < 0$ (car $0 < 0,92 < 1$) :

$$0,92^n < \frac{0,75}{3,05} \iff n \ln(0,92) < \ln\left(\frac{0,75}{3,05}\right) \iff n > \frac{\ln\left(\frac{0,75}{3,05}\right)}{\ln(0,92)} \approx \frac{-1,4028}{-0,0834} \approx 16,82.$$

Le plus petit entier convenable est donc $n = 17$. On le confirme par le calcul des termes : $v_{16} \approx 2,947 \leq 3$ et $v_{17} \approx 3,011 > 3$.

Conclusion : alerte_chlore(3) renvoie 17. Dans le contexte, cela signifie que 17 jours après le mercredi 19 juin, c'est-à-dire le samedi 6 juillet, le taux de chlore de la piscine dépasse pour la première fois $3 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$, la limite haute préconisée par les piscinistes : c'est à cette date qu'Alain devrait réduire ses ajouts de chlore.

Partie B : étude d'un modèle continu 1. L'équation (E) : $y' = -0,08y + \frac{q}{50}$ est une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,08 \neq 0$ et $b = \frac{q}{50}$. D'après le théorème sur les solutions de $y' = ay + b$, ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$y(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Ici $e^{ax} = e^{-0,08x}$ et

$$-\frac{b}{a} = -\frac{q/50}{-0,08} = \frac{q}{50 \times 0,08} = \frac{q}{4}.$$

La fonction f , solution de (E), est donc de la forme $f(x) = C e^{-0,08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

Vérification directe. Si $f(x) = C e^{-0,08x} + \frac{q}{4}$, alors $f'(x) = -0,08 C e^{-0,08x}$ et

$$-0,08 f(x) + \frac{q}{50} = -0,08 C e^{-0,08x} - 0,08 \times \frac{q}{4} + \frac{q}{50} = -0,08 C e^{-0,08x} - \frac{q}{50} + \frac{q}{50} = f'(x),$$

car $\frac{0,08}{4} = 0,02 = \frac{1}{50}$. La fonction constante $\frac{q}{4}$ est la solution particulière constante de (E), son *état d'équilibre*.

Ce que le correcteur attend : l'identification de a et b , et le calcul de $-\frac{b}{a}$ écrit (le signe de a est une source d'erreur fréquente). Citer le théorème du cours suffit ; la vérification par dérivation est un complément.

2.a. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,08x) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc, d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,08x} = 0$. Par produit par la constante C puis somme avec la constante $\frac{q}{4}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = C \times 0 + \frac{q}{4} = \frac{q}{4}.$$

À long terme, le taux de chlore se stabilise autour de $\frac{q}{4} \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$, quelle que soit la valeur de C , c'est-à-dire quel que soit le taux initial.

2.b. Les deux conditions se traduisent par :

- le taux initial (au 19 juin, soit $x = 0$) vaut 0,7 : $f(0) = 0,7$;
- le taux se stabilise à long terme autour de 2 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

D'après la question **2.a**, la seconde condition s'écrit $\frac{q}{4} = 2$, soit $q = 8$. La première donne alors, puisque $e^0 = 1$:

$$f(0) = C e^0 + \frac{q}{4} = C + 2 = 0,7 \iff C = 0,7 - 2 = -1,3.$$

Ainsi $C = -1,3$ et $q = 8$, et le modèle continu est

$$f(x) = 2 - 1,3 e^{-0,08x}.$$

Il faut donc ajouter $q = 8$ grammes de chlore par jour. On vérifie la cohérence : f est croissante (car $-1,3e^{-0,08x}$ croît vers 0), part de 0,7 et tend vers 2 sans jamais le dépasser ; le taux reste donc conforme à la préconisation, à la différence du protocole à 15 g par jour de la partie A dont l'état d'équilibre est $\frac{15}{4} = 3,75 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$, le même que celui trouvé pour la suite (v_n) .

Ce que le correcteur attend : traduire « se stabilise autour de 2 » par une limite et « taux observé le 19 juin » par une condition initiale en $x = 0$, puis résoudre dans le bon ordre (q d'abord, C ensuite).

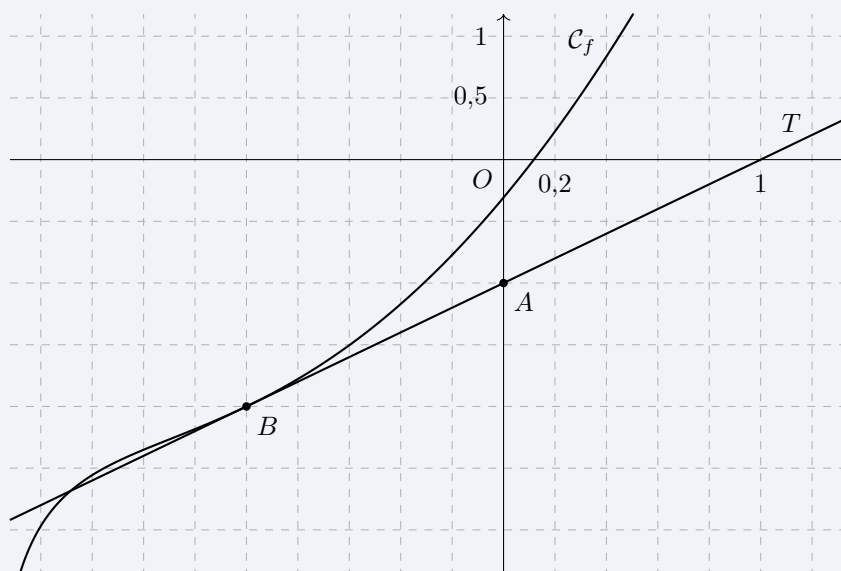
Exercice 3

Sujet — Exercice 3 — 6 points

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $] -2; +\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1 .

On précise que la droite T passe par le point $A(0; -1)$.



Partie A : exploitation du graphique À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La courbe $\mathcal{C}_f$ est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f On considère que la fonction f est définie sur $] -2; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2 . Interpréter graphiquement ce résultat.

On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.

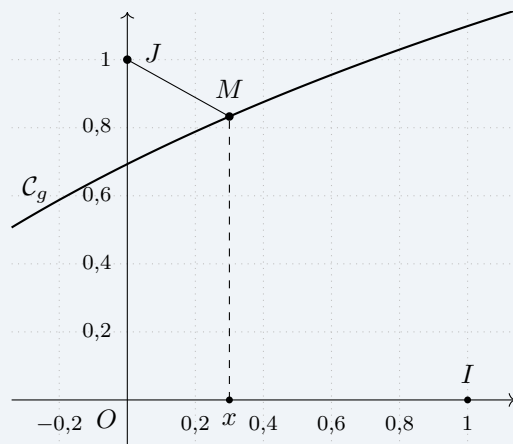
3. Étudier les variations de la fonction f sur $] -2; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -2; +\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $] -2; +\infty[$.
6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Soit g la fonction définie sur $] -2; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x+2)$.

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, représentée ci-contre. Soit M un point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x .

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale. On considère la fonction h définie sur $] -2; +\infty[$ par $h(x) = JM^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.
2. On admet que la fonction h est dérivable sur $] -2; +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée. On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$

où f est la fonction étudiée en partie B.

- 2.a. Dresser le tableau de variations de h sur $] -2; +\infty[$. *Les limites ne sont pas demandées.*
- 2.b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.
3. On notera M_α le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse α .
- 3.a. Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.
- 3.b. En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires. *On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1 .*

Corrigé

Partie A : exploitation du graphique 1. Le point B de $\mathcal{C}_f$ a pour abscisse -1 ; on lit sur le graphique son ordonnée -2 (il est sur la quatrième ligne horizontale sous l'axe des abscisses, chaque carreau valant $0,5$), donc $f(-1) = -2$.

Le nombre dérivé $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point B . Cette

droite passe par $B(-1; -2)$ et par $A(0; -1)$, donc

$$f'(-1) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1 - (-2)}{0 - (-1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ainsi $f(-1) = -2$ et $f'(-1) = 1$. (La tangente T a pour équation $y = x - 1$.)

2. Non. D'après la caractérisation des fonctions convexes dérivables, si f était convexe sur $] -2; +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ serait située entièrement *au-dessus* de chacune de ses tangentes, en particulier au-dessus de T . Or, sur le graphique, à gauche du point B , la courbe traverse la droite T (vers l'abscisse $-1,7$) et se trouve *en dessous* de T pour les abscisses proches de -2 : par exemple à l'abscisse $-1,8$, le point de T est à l'ordonnée $-2,8$ tandis que le point de $\mathcal{C}_f$ est en dessous, vers -3 . La courbe n'est donc pas au-dessus de sa tangente T : f n'est pas convexe sur son ensemble de définition.

On observe d'ailleurs que la courbe est « tournée vers le bas » (concave) près de -2 puis « tournée vers le haut » (convexe) ensuite : elle semble admettre un point d'inflexion d'abscisse voisine de $-1,3$, là où elle traverse sa tangente. La question 6 de la partie B le confirmera.

Ce que le correcteur attend : un argument précis et non une impression visuelle : convexe $\Rightarrow$ courbe au-dessus de toutes ses tangentes, et la tangente T fournit un contre-exemple lisible sur le graphique.

3. Les solutions de $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses. Sur le graphique, la courbe est en dessous de cet axe à gauche, le coupe une seule fois entre O et le point d'abscisse $0,2$, puis reste au-dessus : on conjecture que l'équation $f(x) = 0$ admet **une unique solution**. Le point d'intersection est situé vers le milieu du carreau $[0; 0,2]$: la solution vaut environ $0,1$ (arrondi à 10^{-1}). Sur un graphique, on ne peut pas lire mieux que le dixième : c'est le calcul de la partie B qui précisera $\alpha \approx 0,12$.

Partie B : étude de la fonction f **1.** Étudions la limite de f en -2 par valeurs supérieures ($x > -2$).

— La fonction polynôme $x \mapsto x^2 + 2x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 2x - 1) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 1 = 4 - 4 - 1 = -1$.

— Posons $X = x + 2$. Quand $x \rightarrow -2$ avec $x > -2$, $X \rightarrow 0$ avec $X > 0$, et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty$.
D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, $\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(x + 2) = -\infty$.

Par somme d'une limite finie et d'une limite infinie :

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty.$$

Interprétation graphique : la droite d'équation $x = -2$ est une **asymptote verticale** à la courbe $\mathcal{C}_f$: la courbe « plonge » le long de cette droite quand x se rapproche de -2 , ce que l'on devine sur le graphique à gauche.

2. La fonction f est dérivable sur $] -2; +\infty[$ comme somme de la fonction polynôme $x \mapsto x^2 + 2x - 1$ et de la fonction $x \mapsto \ln(x + 2)$, de la forme $\ln u$ avec $u(x) = x + 2 > 0$ sur cet intervalle et $u'(x) = 1$; d'après la formule $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x + 2}$. Ainsi, pour tout $x > -2$:

$$f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x + 2}.$$

Réduisons au même dénominateur $x + 2$:

$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x + 2) + 1}{x + 2} = \frac{2x^2 + 4x + 2x + 4 + 1}{x + 2} = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}.$$

C'est bien l'expression annoncée.

3. Le signe de $f'(x)$ est celui du quotient $\frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.

- Le dénominateur $x + 2$ est strictement positif sur $] - 2 ; +\infty[$.
- Le numérateur est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 5 = 36 - 40 = -4 < 0$: il n'a pas de racine réelle et est du signe de son coefficient dominant $2 > 0$. Donc $2x^2 + 6x + 5 > 0$ pour tout réel x .

Par quotient de deux quantités strictement positives, $f'(x) > 0$ pour tout $x > -2$: la fonction f est **strictement croissante** sur $] - 2 ; +\infty[$. Avec $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ (question 1) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (admis), on obtient le tableau de variations :

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Les valeurs $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes sont des limites, non atteintes (-2 n'appartient pas à l'ensemble de définition).

4. Sur l'intervalle $] - 2 ; +\infty[$, la fonction f est :

- **continue**, car dérivable (question 2) ;
- **strictement croissante** (question 3) ;
- et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, de sorte que 0 est compris entre les limites de f aux bornes de l'intervalle.

D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires** (théorème de la bijection, étendu à un intervalle ouvert en remplaçant les valeurs aux bornes par les limites), l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution α sur $] - 2 ; +\infty[$.

Valeur approchée. À la calculatrice :

$$f(0,11) = 0,0121 + 0,22 - 1 + \ln(2,11) \approx -0,7679 + 0,7467 \approx -0,021 < 0,$$

$$f(0,12) = 0,0144 + 0,24 - 1 + \ln(2,12) \approx -0,7456 + 0,7514 \approx 0,006 > 0.$$

Comme f est strictement croissante, $0,11 < \alpha < 0,12$. Pour arrondir au centième, on teste le milieu : $f(0,115) \approx -0,7568 + 0,7489 \approx -0,008 < 0$, donc $0,115 < \alpha < 0,12$ et

$$\alpha \approx 0,12 \quad (\text{arrondi à } 10^{-2}).$$

Une valeur plus précise est $\alpha \approx 0,1179$, cohérente avec la lecture graphique $\alpha \approx 0,1$ de la partie A.

Ce que le correcteur attend : les trois hypothèses du corollaire (continuité, stricte monotonie, position de 0 par rapport aux limites) explicitement citées ; l'unicité vient de la stricte croissance. L'arrondi au centième exige l'encadrement $0,115 < \alpha < 0,125$, et non seulement $0,11 < \alpha < 0,12$.

5. La fonction f est strictement croissante sur $] - 2 ; +\infty[$ et s'annule en α . Donc :

- pour $-2 < x < \alpha$, $f(x) < f(\alpha) = 0$;
- pour $x > \alpha$, $f(x) > f(\alpha) = 0$.

x	-2		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi $f(x) < 0$ sur $] -2; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

6. La fonction f' est dérivable sur $] -2; +\infty[$ (somme de la fonction affine $x \mapsto 2x + 2$ et de $x \mapsto \frac{1}{x+2}$, inverse d'une fonction affine ne s'annulant pas). En dérivant l'expression $f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+2}$, avec $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$:

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2}.$$

Le dénominateur $(x+2)^2$ est strictement positif : le signe de $f''(x)$ est celui de $2(x+2)^2 - 1$. Pour $x > -2$, on a $x+2 > 0$, donc

$$2(x+2)^2 - 1 > 0 \iff (x+2)^2 > \frac{1}{2} \iff x+2 > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x > -2 + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Posons $x_0 = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-4}{2} \approx -1,29$. On obtient :

x	-2		x_0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathcal{C}_f$		concave		convexe	

La dérivée seconde f'' s'annule en x_0 en changeant de signe (négative avant, positive après), et en aucun autre point. D'après la caractérisation analytique du point d'inflexion, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un **unique point d'inflexion**, d'abscisse

$$x_0 = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -1,29.$$

La courbe est concave sur $] -2; x_0]$ et convexe sur $[x_0; +\infty[$, ce qui confirme la réponse de la question 2 de la partie A : B (d'abscisse $-1 > x_0$) est dans la partie convexe, et la courbe repasse sous sa tangente T à gauche de x_0 .

Ce que le correcteur attend : f'' doit s'annuler en changeant de signe : dire « $f''(x_0) = 0$ » ne suffit pas. On n'oublie pas que $x+2 > 0$ pour ne garder que la racine positive de $(x+2)^2 = \frac{1}{2}$.

Partie C : une distance minimale 1. Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$, le point J a pour coordonnées $(0; 1)$ et le point M de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x a pour coordonnées $(x; g(x)) = (x; \ln(x+2))$. Le repère étant orthonormé, la distance de deux points se calcule par la formule $JM^2 = (x_M - x_J)^2 + (y_M - y_J)^2$, donc, pour tout $x > -2$:

$$h(x) = JM^2 = (x-0)^2 + (\ln(x+2)-1)^2 = x^2 + [\ln(x+2)-1]^2.$$

Remarque. On peut retrouver l'expression admise de h' : $h'(x) = 2x + 2[\ln(x+2)-1] \times \frac{1}{x+2} = \frac{2x(x+2) + 2\ln(x+2) - 2}{x+2} = \frac{2(x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2))}{x+2} = \frac{2f(x)}{x+2}$.

2.a. Pour tout $x > -2$, $h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$ avec $x+2 > 0$ et $2 > 0$: le signe de $h'(x)$ est celui de $f(x)$, déterminé à la question 5 de la partie B. Donc $h'(x) < 0$ sur $] -2; \alpha[$, $h'(\alpha) = 0$ et $h'(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$: la fonction h est strictement décroissante sur $] -2; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

x	-2		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

La fonction h admet donc un minimum sur $] -2; +\infty[$, atteint en $x = \alpha$ uniquement. (Avec la question **3.a**, $h(\alpha) = \alpha^2 + (-2\alpha - \alpha^2)^2 = \alpha^2[1 + (\alpha + 2)^2] \approx 0,076$.)

2.b. La distance JM est positive et $JM = \sqrt{h(x)}$. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc JM est minimale exactement lorsque $h(x) = JM^2$ est minimale, c'est-à-dire, d'après le tableau de variations, pour $x = \alpha$ et seulement pour cette valeur. La valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est donc $\alpha \approx 0,12$, et cette distance minimale vaut $\sqrt{h(\alpha)} \approx 0,28$.

Ce que le correcteur attend : la stricte croissance de la racine carrée, qui justifie le passage de « h minimale » à « JM minimale ».

3.a. Le réel α est la solution de l'équation $f(x) = 0$ (partie B, question 4) : $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire

$$\alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha + 2) = 0 \iff \ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2.$$

3.b. *Coefficient directeur de la tangente.* La fonction g est dérivable sur $] -2; +\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{x+2}$. La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α a pour coefficient directeur

$$m_1 = g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 2}.$$

Coefficient directeur de (JM_α) . Les points $J(0; 1)$ et $M_\alpha(\alpha; \ln(\alpha + 2))$ ont des abscisses distinctes puisque $\alpha \neq 0$ (en effet $f(0) = -1 + \ln 2 \approx -0,31 \neq 0$, et d'ailleurs $\alpha \approx 0,12$) ; la droite (JM_α) n'est donc pas verticale et son coefficient directeur vaut, en utilisant la question **3.a** :

$$m_2 = \frac{\ln(\alpha + 2) - 1}{\alpha - 0} = \frac{(1 - 2\alpha - \alpha^2) - 1}{\alpha} = \frac{-2\alpha - \alpha^2}{\alpha} = \frac{-\alpha(2 + \alpha)}{\alpha} = -(\alpha + 2).$$

Conclusion. Le produit des coefficients directeurs vaut

$$m_1 \times m_2 = \frac{1}{\alpha + 2} \times (-(\alpha + 2)) = -1.$$

Le repère étant orthonormé, la tangente à $\mathcal{C}_g$ en M_α et la droite (JM_α) sont **perpendiculaires**. Géométriquement, le point de $\mathcal{C}_g$ le plus proche de J est celui où le segment $[JM]$ est normal à la courbe : la partie C retrouve ainsi, par le calcul, la propriété du projeté orthogonal.

Ce que le correcteur attend : justifier $\alpha \neq 0$ avant de diviser par α , et remplacer $\ln(\alpha + 2)$ par $1 - 2\alpha - \alpha^2$ (question **3.a**) pour faire apparaître la factorisation par α .

Exercice 4

Sujet — Exercice 4 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$A(2;0;0), \quad B(0;4;3), \quad C(4;4;1), \quad D(0;0;4) \quad \text{et} \quad H(-1;1;2).$$

Affirmation 1 : les points A , C et D définissent un plan $\mathcal{P}$ d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$.

Affirmation 2 : les points A , B , C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - y + 2z - 2 = 0$.

Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) .

Corrigé

Affirmation 1 : VRAIE.

L'affirmation contient deux choses à vérifier : que les trois points définissent bien un plan (ils ne sont pas alignés), puis que ce plan admet l'équation proposée.

Les points A , C et D ne sont pas alignés. Calculons

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 4-2 \\ 4-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{AD} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

S'il existait un réel k tel que $\vec{AD} = k\vec{AC}$, la deuxième coordonnée donnerait $0 = 4k$, soit $k = 0$, et la première donnerait alors $-2 = 0$, ce qui est absurde. Les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ ne sont pas colinéaires : les points A , C et D ne sont pas alignés et définissent un plan $\mathcal{P} = (ACD)$.

Le vecteur $\vec{n}(8; -5; 4)$ est normal à $\mathcal{P}$. Le repère étant orthonormé, on utilise l'expression analytique du produit scalaire :

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 8 \times 2 + (-5) \times 4 + 4 \times 1 = 16 - 20 + 4 = 0,$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AD} = 8 \times (-2) + (-5) \times 0 + 4 \times 4 = -16 + 0 + 16 = 0.$$

Le vecteur non nul $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ du plan $\mathcal{P}$: c'est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Équation cartésienne. D'après le théorème sur l'équation cartésienne d'un plan, $\mathcal{P}$ admet une équation de la forme $8x - 5y + 4z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$. Le point $A(2;0;0)$ appartient à $\mathcal{P}$, donc $8 \times 2 - 0 + 0 + d = 0$, soit $d = -16$. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est bien

$$8x - 5y + 4z - 16 = 0.$$

Vérification par les deux autres points : pour $C(4; 4; 1)$, $8 \times 4 - 5 \times 4 + 4 \times 1 - 16 = 32 - 20 + 4 - 16 = 0$; pour $D(0; 0; 4)$, $0 - 0 + 16 - 16 = 0$. Les trois points vérifient l'équation. **L'affirmation 1 est vraie.**

Ce que le correcteur attend : vérifier que les trois points satisfont l'équation ne suffit pas à lui seul : il faut aussi qu'ils ne soient pas alignés (sinon ils ne « définissent » pas un plan, et une infinité de plans passeraient par eux). Une autre rédaction, aussi valable : l'équation proposée est celle d'un plan (ses coefficients 8, -5, 4 ne sont pas tous nuls), les trois points non alignés lui appartiennent, donc ce plan est (ACD) .

Affirmation 2 : FAUSSE.

Les points A , C et D définissent le plan $\mathcal{P}$ (affirmation 1). Les quatre points A , B , C , D sont coplanaires si et seulement si B appartient à ce plan, c'est-à-dire si ses coordonnées vérifient l'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$. Or, pour $B(0; 4; 3)$:

$$8 \times 0 - 5 \times 4 + 4 \times 3 - 16 = 0 - 20 + 12 - 16 = -24 \neq 0.$$

Le point B n'appartient pas au plan (ACD) : les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires. **L'affirmation 2 est fausse.** (Ils forment un tétraèdre non aplati.)

Ce que le correcteur attend : réutiliser le plan de l'affirmation 1 rend la réponse immédiate ; on peut aussi montrer que $\vec{AB}(-2; 4; 3)$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$, mais c'est plus long.

Affirmation 3 : VRAIE.

Vecteurs directeurs. La droite (AC) est dirigée par $\vec{AC}(2; 4; 1)$ et la droite (BH) par

$$\vec{BH} \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 1 - 4 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : si $\vec{BH} = k \vec{AC}$, la première coordonnée impose $k = -\frac{1}{2}$ et la deuxième $k = -\frac{3}{4}$, ce qui est contradictoire. Les droites ne sont donc pas parallèles : elles sont soit sécantes, soit non coplanaires. Il faut chercher un point commun.

Représentations paramétriques. Un point $M(x; y; z)$ appartient à (AC) si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{AM} = t \vec{AC}$, et à (BH) si et seulement s'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{BM} = s \vec{BH}$:

$$(AC) : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (BH) : \begin{cases} x = -s \\ y = 4 - 3s \\ z = 3 - s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Recherche d'un point commun. Un point commun correspond à un couple $(t; s)$ solution du système

$$\begin{cases} 2 + 2t = -s \\ 4t = 4 - 3s \\ t = 3 - s \end{cases}$$

La troisième équation donne $t = 3 - s$. En reportant dans la première : $2 + 2(3 - s) = -s \iff 8 - 2s = -s \iff s = 8$, d'où $t = 3 - 8 = -5$. Vérifions la deuxième équation, qui n'a pas encore servi : $4t = 4 \times (-5) = -20$ et $4 - 3s = 4 - 24 = -20$. Elle est satisfaite : le système admet la solution $(t; s) = (-5; 8)$.

Le point correspondant est, avec $t = -5$ dans (AC) : $I(2 - 10; -20; -5) = I(-8; -20; -5)$; avec $s = 8$ dans (BH) : $(-8; 4 - 24; 3 - 8) = (-8; -20; -5)$. Les deux droites, non parallèles, ont le point $I(-8; -20; -5)$ en commun : elles sont sécantes en I . **L'affirmation 3 est vraie.**

Ce que le correcteur attend : le système a trois équations pour deux inconnues : on résout avec deux équations et l'on *vérifie* la troisième, c'est elle qui décide entre « sécantes » et « non coplanaires ». Il est indispensable d'utiliser deux paramètres différents (t et s) pour les deux droites.

Affirmation 4 : VRAIE.

Par définition, le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point d'intersection de ce plan avec la droite passant par D et orthogonale au plan. Le point H est donc le projeté orthogonal de D si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies : H appartient au plan (ABC) , et la droite (DH) est orthogonale au plan (ABC) .

Le point H appartient à (ABC) . Pour $H(-1; 1; 2)$: $-1 - 1 + 2 \times 2 - 2 = -1 - 1 + 4 - 2 = 0$. Les coordonnées de H vérifient l'équation $x - y + 2z - 2 = 0$: $H \in (ABC)$.

La droite (DH) est orthogonale à (ABC) . D'après l'équation cartésienne, le vecteur $\vec{n}'(1; -1; 2)$ est normal au plan (ABC) . Or

$$D\vec{H} \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 1 - 0 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{n}'.$$

Le vecteur $D\vec{H}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}'$ (et non nul) : la droite (DH) est orthogonale au plan (ABC) .

Les deux conditions sont satisfaites : H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .

L'affirmation 4 est vraie. On en déduit au passage que la distance de D au plan (ABC) vaut $DH = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$.

Vérification de l'équation admise : $A : 2 - 0 + 0 - 2 = 0$; $B : 0 - 4 + 6 - 2 = 0$; $C : 4 - 4 + 2 - 2 = 0$.

Les trois points sont bien dans le plan d'équation $x - y + 2z - 2 = 0$. On note que D n'y est pas ($0 - 0 + 8 - 2 = 6 \neq 0$), ce qui confirme l'affirmation 2.

Ce que le correcteur attend : les deux conditions, appartenance de H au plan et orthogonalité de (DH) au plan ; l'une sans l'autre ne prouve rien. L'orthogonalité se lit sur la colinéarité de $D\vec{H}$ avec le vecteur normal fourni par l'équation cartésienne, sans qu'il soit nécessaire de calculer deux produits scalaires.