

Physique-chimie

Baccalauréat général 2024 — épreuve de spécialité

Métropole, mercredi 19 juin 2024 (24-PYCJ1ME1)

Corrigé

Trois exercices

Exercice 1

Sujet — Vers le bleu de thymol — 9 points

Le bleu de thymol est un indicateur coloré acido-basique de plus en plus utilisé dans les laboratoires. Suivant les recommandations de l'INRS (Institut National de Recherche et de Sécurité), il se substitue en effet à la phénolphthaléine, couramment utilisée auparavant, et qui est désormais classée CMR (Cancérigène Mutagène Reprotoxique). Comme le montre la figure 1, le bleu de thymol peut être synthétisé à partir du thymol, lui-même extrait de la plante de thym ou synthétisé à partir du *m*-crésol.

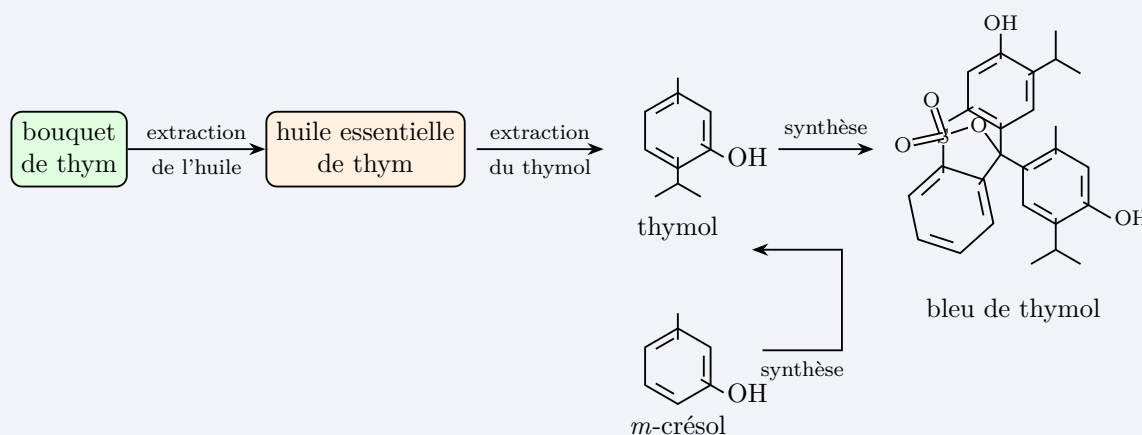


Figure 1. Modes d'obtention possibles du bleu de thymol

L'objectif de cet exercice est d'étudier deux modes d'obtention du thymol puis de s'intéresser au bleu de thymol en tant qu'alternative à la phénolphthaléine comme indicateur coloré.

1. Extractions successives Le thym est une petite plante cultivée depuis l'antiquité dans les régions du pourtour méditerranéen. Appréciée en cuisine pour ses arômes, la plante est également utilisée pour ses vertus thérapeutiques dues au thymol, constituant principal de l'espèce de thym étudiée dans cet exercice.

Données :

- le thymol, à température ambiante, se présente sous la forme de cristaux incolores à l'odeur caractéristique ;
- la solubilité du thymol est faible dans l'eau et forte dans les solvants organiques ;
- le traitement d'un échantillon de 100 g de thym d'origine française permet d'obtenir au maximum 2 g d'huile essentielle de thym ;
- la configuration électronique de l'oxygène dans son état fondamental est : $(1s)^2(2s)^2(2p)^4$;
- l'hexane est un solvant organique de densité $d = 0,66$ et non miscible à l'eau ;
- le couple thymol / ion thymolate est noté : $R-OH / R-O^-$.

Q1. Écrire la formule semi-développée du thymol puis entourer et nommer son groupe caractéristique.

Q2. Représenter le schéma de Lewis de l'ion thymolate, noté $R-O^-$.

Du thym à l'huile essentielle de thym

L'hydrodistillation est l'une des techniques d'extraction des huiles essentielles préconisées par la législation européenne.

Suite à l'hydrodistillation d'un échantillon de thym, on réalise une chromatographie sur couche mince de l'huile essentielle obtenue, les échantillons étant solubilisés dans un solvant adapté. Le chromatogramme est représenté figure 2.

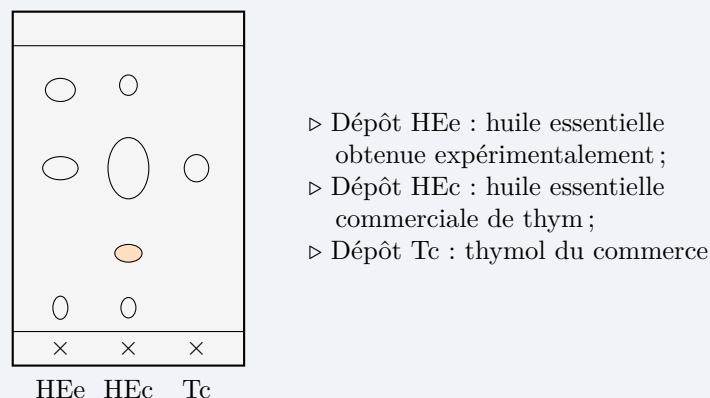


Figure 2. Chromatogramme obtenu

Q3. Justifier que l'huile essentielle obtenue expérimentalement est un mélange qui contient du thymol.

De l'huile essentielle au thymol

Un article scientifique propose le protocole d'extraction du thymol de l'huile essentielle suivant :

- ajouter 1,0 mL d'huile essentielle de thym à 5 mL de solution aqueuse d'hydroxyde de sodium ;
- après chauffage dans un four à micro-ondes, éliminer la phase huileuse puis acidifier la phase aqueuse à l'aide d'acide chlorhydrique ;
- ajouter de l'hexane, agiter, laisser décanter et récupérer la phase contenant le thymol.

Après évaporation du solvant, on obtient des cristaux dont la masse correspond à 31 % de la masse de thymol présent initialement dans l'huile essentielle.

D'après Journal of Medicinal Plants and By-products, 2021

Donnée : le pourcentage massique moyen en thymol de l'huile essentielle de thym est de 53 %.

Q4. Écrire l'équation de la réaction modélisant l'action de l'acide chlorhydrique sur l'ion thymolate $R-O^-$.

Q5. En déduire la nature et la position de la phase dans laquelle se trouve le thymol à l'issue de la décantation.

Q6. Montrer que la masse de plante de thym à utiliser pour obtenir 1 g de thymol vaut près de 300 g.

2. Synthèse du thymol Le thymol utilisé dans les produits pharmaceutiques est principalement obtenu par synthèse. Comme indiqué en figure 3, le thymol peut être industriellement synthétisé à partir de *m*-crésol et de propène en excès, en présence d'oxyde d'aluminium, qui joue ici le rôle de catalyseur. Cette transformation génère plusieurs produits secondaires et rend complexe l'obtention sélective du thymol.

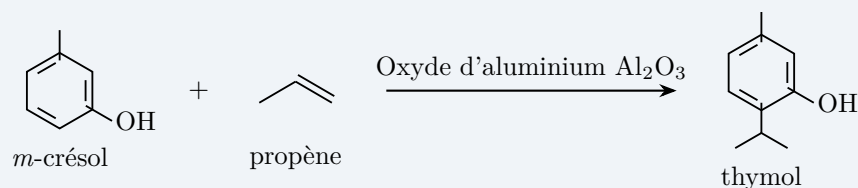


Figure 3. Exemple d'un procédé de synthèse du thymol

Données :

- masse volumique de l'eau : $1,00 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$;
- tableau rassemblant des propriétés physiques et chimiques de quelques molécules :

Molécule	<i>m</i> -crésol	propène	thymol	Quelques produits secondaires			
				P1	P2	P3	P4
Formule topologique	<chem>Cc1ccccc1O</chem>	<chem>CC=C</chem>	<chem>CC(C)c1cc(C)ccc(O)c1</chem>	<chem>CC(C)c1ccccc1O</chem>	<chem>CC(C)c1ccc(O)cc1</chem>	<chem>CC(C)c1ccc(O)cc1</chem>	<chem>CC(C)c1ccc(O)cc1</chem>
Température d'ébullition (°C)	203	-47,7	233	-	-	-	-
Masse molaire (g · mol ⁻¹)	108,1	42,1	150,2	-	-	-	-
Densité	1,03	-	-	-	-	-	-

Q7. Déterminer si les produits secondaires P2 et P4 de la réaction sont des isomères du thymol. De nombreux catalyseurs ont récemment été développés dans le but, entre autres, de réduire la température de la synthèse et d'obtenir une sélectivité maximale en thymol.

Q8. Donner la définition d'un catalyseur et indiquer en quoi son utilisation peut permettre de « réduire la température de la synthèse ».

On considère que la transformation entre le *m*-crésol et le propène n'est pas totale et que l'état final de la transformation est un état d'équilibre chimique.

Q9. Expliquer l'intérêt d'introduire le propène en excès dans cette synthèse industrielle.

Une distillation fractionnée industrielle permet de purifier le thymol et de récupérer le *m*-crésol n'ayant pas réagi en vue de son recyclage.

Q10. Justifier que le thymol et le *m*-crésol peuvent *a priori* être séparés lors de la distillation fractionnée. Indiquer l'espèce que l'on récupérerait en premier.

Q11. En considérant le *m*-crésol comme réactif limitant dans la transformation, dont le rendement est de 73 %, vérifier que le volume de *m*-crésol nécessaire pour synthétiser 1,0 g de thymol par le procédé de la figure 3 est inférieur à 1 mL.

3. Le bleu de thymol La phénolphtaléine est un indicateur coloré acide-base adapté pour les titrages d'acide faible. L'objectif de cette partie est de montrer qu'il en est de même pour le bleu de thymol.

Données :

- phénolphtaléine : indicateur coloré acide-base passant de l'incolore au rose dans la zone de virage expérimentale de pH [8,2 – 9,9] ;
- bleu de thymol : indicateur coloré acide-base ayant trois formes participant à deux couples acide-base d'écriture simplifiée $\text{BTH}_2(\text{aq}) / \text{BTH}^-(\text{aq})$ et $\text{BTH}^-(\text{aq}) / \text{BT}^{2-}(\text{aq})$;

- pour discuter de l'accord du résultat d'une mesure avec une valeur de référence, on peut utiliser le quotient $\frac{|x - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$ avec x la valeur mesurée, x_{ref} la valeur de référence et $u(x)$ l'incertitude-type associée à la valeur mesurée x .

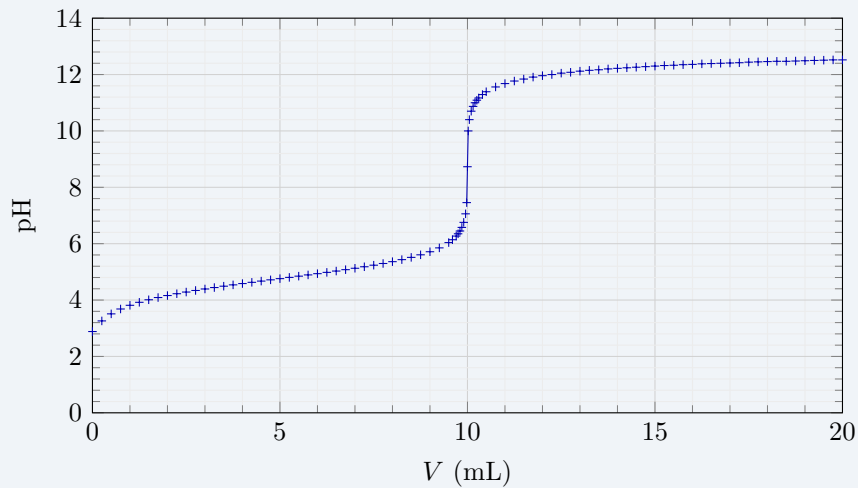


Figure 4. Simulation du titrage de 10,0 mL d'une solution d'un acide faible (acide éthanoïque) de concentration $0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ par une solution de base forte (hydroxyde de sodium) de concentration $0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

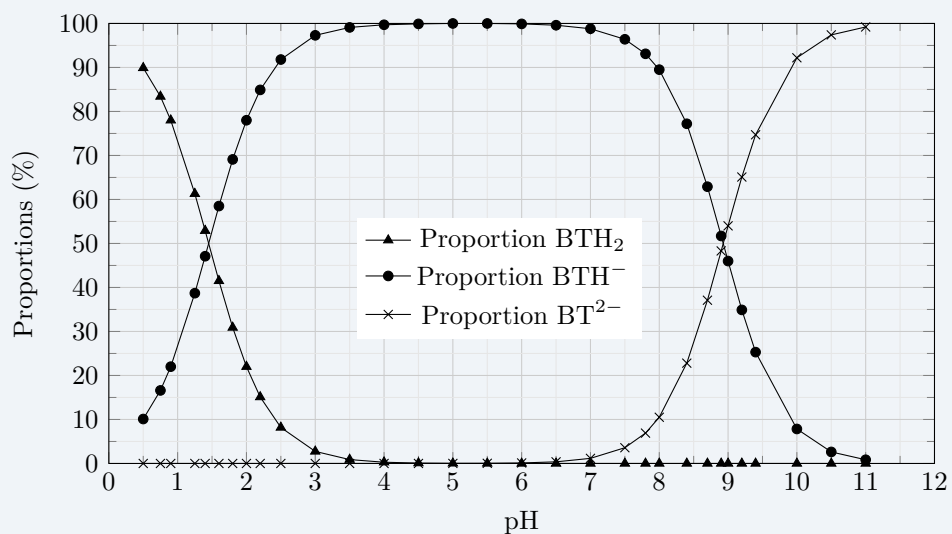


Figure 5. Diagramme de distribution des espèces du bleu de thymol (*d'après BUP, mai 2019*)

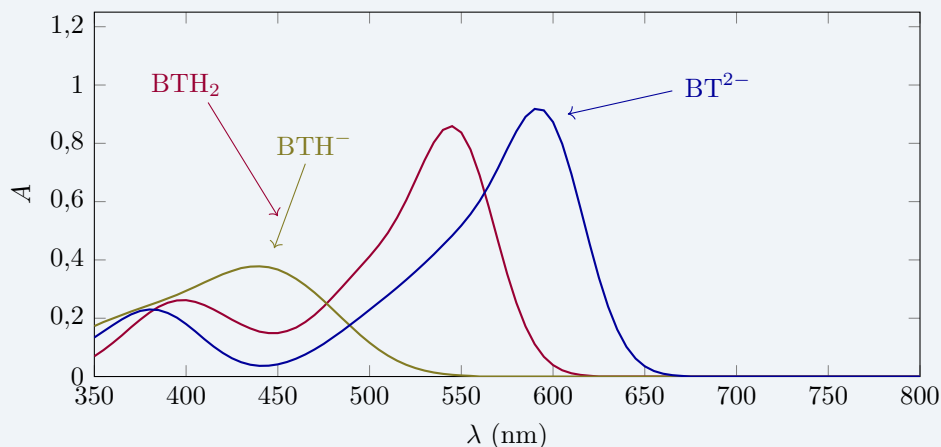


Figure 6. Spectre d'absorption UV-visible des trois formes acide-base du bleu de thymol (d'après BUP, mai 2019)

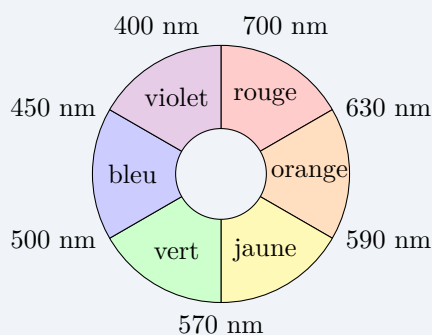


Figure 7. Cercle chromatique.

Q12. Parmi les espèces participant aux couples acide-base du bleu de thymol, identifier la forme amphotère.

Q13. Exprimer la constante d'acidité K_A d'un couple acide-base noté HA / A^- en fonction des concentrations des espèces associées à l'équilibre.

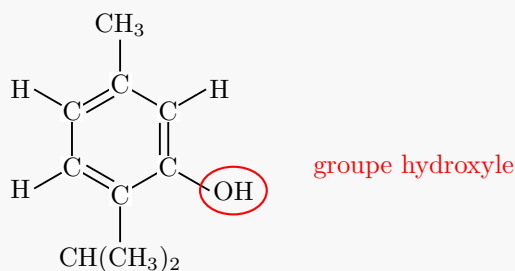
Q14. À l'aide de l'ensemble des informations proposées, déterminer la valeur du pK_A du couple $BTH^-(aq) / BT^{2-}(aq)$ du bleu de thymol. Justifier que celui-ci puisse remplacer la phénolphthaléine dans nos laboratoires, en précisant le changement de couleur observé lors du titrage d'un acide faible par une base forte.

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter sa démarche même si elle n'a pas abouti. La démarche suivie est évaluée et nécessite donc d'être correctement présentée.

Q15. La valeur tabulée du pK_A à 25 °C du couple acide-base $BTH^-(aq) / BT^{2-}(aq)$ est de 8,9. Indiquer si la valeur expérimentale obtenue est en accord avec celle-ci. L'incertitude-type associée au pK_A déterminé par cette méthode est estimée à $u(pK_A) = 0,2$.

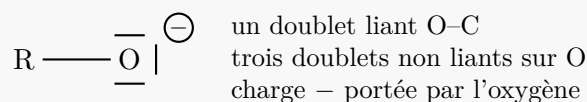
Corrigé

1. Extractions successives **Q1.** La formule topologique de la figure 1 se « développe » en écrivant les atomes de carbone et d'hydrogène du squelette (sauf les liaisons C–H, que la formule semi-développée n'explicite pas) : le thymol est un cycle benzénique portant un groupe méthyle $-CH_3$, un groupe isopropyle $-CH(CH_3)_2$ et un groupe **hydroxyle** $-OH$. Sa formule brute est $C_{10}H_{14}O$ ($M = 10 \times 12,0 + 14 \times 1,0 + 16,0 = 150 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, cohérent avec la donnée 150,2).



Le groupe caractéristique est le groupe **hydroxyle** —OH . *Ce que le correcteur attend* : le nom « hydroxyle » (et non « alcool », qui est une famille) ; on peut préciser que, porté par un carbone du cycle aromatique, il fait du thymol un *phénol* et non un alcool, ce qui explique son caractère acide (couple $\text{R—OH} / \text{R—O}^-$).

Q2. L'oxygène, de configuration $(1s)^2(2s)^2(2p)^4$, possède $2 + 4 = 6$ électrons de valence. Dans le thymol R—OH , il forme deux liaisons (avec C et avec H) et porte deux doublets non liants. La perte du proton H^+ (qui part sans emporter le doublet de la liaison O—H) laisse ce doublet sur l'oxygène : dans l'ion thymolate, l'oxygène est lié au carbone par une liaison simple et porte **trois doublets non liants**, soit $1 + 2 \times 3 = 7$ électrons de valence au lieu de 6 : il porte la charge formelle -1 .

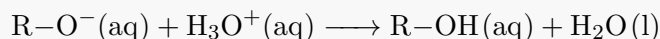


Q3. Dans les mêmes conditions d'élution, une espèce chimique donnée migre toujours à la même hauteur (même rapport frontal). Sur le chromatogramme de la figure 2 :

- le dépôt HEE (huile obtenue expérimentalement) donne **plusieurs taches** (trois, à des hauteurs différentes) : l'huile essentielle est un **mélange** de plusieurs espèces ;
- l'une de ces taches se trouve exactement à la **même hauteur que l'unique tache du dépôt Tc**, le thymol du commerce (à mi-hauteur de la plaque) : l'huile contient donc du **thymol**.

On remarque de plus que l'huile commerciale HEC présente elle aussi une tache (la plus grosse) à cette hauteur, ce qui confirme que le thymol en est le constituant principal.

Q4. L'acide chlorhydrique est une solution d'ions oxonium H_3O^+ et chlorure Cl^- (acide fort, totalement dissocié). L'ion thymolate est la base du couple $\text{R—OH} / \text{R—O}^-$; il capte un proton cédé par l'acide H_3O^+ du couple $\text{H}_3\text{O}^+ / \text{H}_2\text{O}$:



(l'ion chlorure est spectateur). C'est une réaction acide-base par transfert de proton, quasi totale car l'acide H_3O^+ est l'acide le plus fort existant dans l'eau.

Q5. Dans la soude, le thymol avait été transformé en ion thymolate R—O^- , espèce ionique soluble dans l'eau (d'où le passage du thymol dans la phase aqueuse et l'élimination de la « phase huileuse » qui contient les autres constituants de l'huile). L'acidification (Q4) régénère le **thymol moléculaire** R—OH , dont la solubilité est *faible dans l'eau et forte dans les solvants organiques* : après ajout d'hexane et agitation, le thymol passe dans la **phase organique** (hexane). L'hexane n'étant pas miscible à l'eau, deux phases se séparent à la décantation ; sa densité $d = 0,66 < 1$ est inférieure à celle de la phase aqueuse : la phase contenant le thymol est la **phase supérieure** de l'ampoule à décanter. On la récupère, puis l'évaporation de l'hexane laisse les cristaux de thymol.

Q6. On remonte la chaîne des rendements, de la masse de thymol voulue à la masse de plante.

- Les cristaux obtenus ne représentent que 31 % du thymol présent dans l'huile : pour $m_{\text{thymol}} = 1$ g, l'huile devait contenir $m_{\text{thymol, huile}} = \frac{1}{0,31} = 3,2$ g de thymol.
- Le thymol représente 53 % de la masse de l'huile essentielle : $m_{\text{huile}} = \frac{3,2}{0,53} = 6,1$ g.
- Au mieux, 100 g de thym donnent 2 g d'huile (2 %) : $m_{\text{thym}} = \frac{6,1}{0,02} = 3,0 \times 10^2$ g.

Sous forme littérale, $m_{\text{thym}} = \frac{m_{\text{thymol}}}{0,31 \times 0,53 \times 0,020} = \frac{1}{3,3 \times 10^{-3}} \approx 3 \times 10^2$ g : il faut bien **près de 300 g de thym** (et au moins, puisque 2 g d'huile est un maximum) pour obtenir 1 g de thymol. *Ce que le correcteur attend* : les trois pourcentages divisent successivement (on remonte la chaîne), et non multiplient.

2. Synthèse du thymol Q7. Deux espèces sont isomères (de constitution) si elles ont la **même formule brute** et des enchaînements d'atomes différents. Comptons les atomes sur les formules topologiques (chaque carbone du cycle non substitué porte un H) :

- thymol : cycle C_6H_3 + méthyle CH_3 + isopropyle C_3H_7 + OH, soit $\text{C}_{10}\text{H}_{14}\text{O}$;
- P2 : mêmes groupes (un méthyle, un isopropyle, un hydroxyle) sur un cycle C_6H_3 , soit $\text{C}_{10}\text{H}_{14}\text{O}$: **P2 est un isomère du thymol** (isomère de position : en numérotant le cycle à partir du carbone porteur de l'hydroxyle, le thymol est le 2-isopropyl-5-méthylphénol et P2 le 4-isopropyl-3-méthylphénol — les mêmes groupes, à des positions différentes) ;
- P4 : cycle C_6H_2 + méthyle + deux isopropyles + OH, soit $\text{C}_{13}\text{H}_{20}\text{O}$: la formule brute diffère (trois carbones et six hydrogènes de plus, produit d'une double addition de propène) : **P4 n'est pas un isomère du thymol**.

Q8. Un **catalyseur** est une espèce chimique qui *accélère* une transformation sans figurer dans l'équation de la réaction : consommé dans une étape puis régénéré, il ne modifie ni l'état final ni la constante d'équilibre, seulement la vitesse (ici l'oxyde d'aluminium, solide : catalyse hétérogène).

La température est un facteur cinétique : on chauffe pour obtenir une vitesse de synthèse suffisante. Un catalyseur plus efficace, en remplaçant le chemin réactionnel par une succession d'étapes plus faciles (barrières d'énergie plus basses), permet d'atteindre une vitesse acceptable *à température plus basse* : on peut donc « réduire la température de la synthèse », d'où une économie d'énergie et moins de produits secondaires.

Q9. L'état final est un équilibre chimique : le *m*-crésol n'est pas entièrement converti. En introduisant le propène **en excès**, on augmente la concentration d'un réactif, ce qui abaisse le quotient de réaction Q_r en dessous de K : le système évolue dans le **sens direct** et consomme davantage le réactif limitant, le *m*-crésol. La constante K ne change pas, mais le taux d'avancement final, donc le rendement en thymol *par rapport au m-crésol*, augmente. On choisit d'introduire en excès le propène plutôt que le *m*-crésol parce qu'il est bon marché et gazeux, donc facile à séparer et à recycler.

Q10. La distillation fractionnée sépare des liquides miscibles d'après leurs **températures d'ébullition** : d'après le tableau, $T_{\text{éb}}(\text{m-crésol}) = 203$ °C et $T_{\text{éb}}(\text{thymol}) = 233$ °C, soit un écart de 30 °C, suffisant pour une séparation. L'espèce la plus volatile, celle de plus basse température d'ébullition, distille en premier : on récupère d'abord le **m-crésol**, que l'on recycle, puis le thymol.

Q11. D'après l'équation de la figure 3, une mole de *m*-crésol donne au plus une mole de thymol (stœchiométrie 1 :1). Quantité de thymol visée :

$$n_{\text{thymol}} = \frac{m_{\text{thymol}}}{M_{\text{thymol}}} = \frac{1,0}{150,2} = 6,66 \times 10^{-3} \text{ mol.}$$

Le rendement $\eta = \frac{n_{\text{obtenu}}}{n_{\text{max}}} = 0,73$ impose $n_{\text{max}} = \frac{n_{\text{thymol}}}{0,73}$; le *m*-crésol étant limitant, $n_{\text{max}} = n_{\text{crésol}}$, donc

$$n_{\text{crésol}} = \frac{6,66 \times 10^{-3}}{0,73} = 9,1 \times 10^{-3} \text{ mol},$$

puis $m_{\text{crésol}} = n_{\text{crésol}} M_{\text{crésol}} = 9,1 \times 10^{-3} \times 108,1 = 0,99 \text{ g}$. La densité $d = 1,03$ donne la masse volumique $\rho = d \rho_{\text{eau}} = 1,03 \times 1,00 \times 10^3 = 1,03 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} = 1,03 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$, d'où

$$V_{\text{crésol}} = \frac{m_{\text{crésol}}}{\rho} = \frac{0,99}{1,03} = 0,96 \text{ mL} < 1 \text{ mL}.$$

Le volume de *m*-crésol nécessaire est bien inférieur à 1 mL. *Ce que le correcteur attend* : diviser (et non multiplier) par le rendement, et la conversion $\text{g} \cdot \text{L}^{-1} \rightarrow \text{g} \cdot \text{mL}^{-1}$.

3. Le bleu de thymol Q12. Une espèce amphotère (ou ampholyte) est à la fois l'acide d'un couple et la base d'un autre. BTH^- est la base du couple $\text{BTH}_2 / \text{BTH}^-$ et l'acide du couple $\text{BTH}^- / \text{BT}^{2-}$: la forme amphotère est BTH^- .

Q13. Pour l'équilibre $\text{HA}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightleftharpoons \text{A}^-(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$, la constante d'acidité s'écrit, avec les concentrations à l'équilibre (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$, rapportées à $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$) :

$$K_A = \frac{[\text{A}^-]_{\text{eq}} [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{eq}}}{[\text{HA}]_{\text{eq}}}, \quad \text{p}K_A = -\log K_A.$$

Q14. Démarche. On détermine le $\text{p}K_A$ sur le diagramme de distribution (figure 5), on lit le pH à l'équivalence sur la courbe de titrage (figure 4) pour vérifier qu'il appartient à la zone de virage, puis on déduit les couleurs des deux formes des spectres (figure 6) et du cercle chromatique (figure 7).

Valeur du $\text{p}K_A$. D'après la relation $\text{pH} = \text{p}K_A + \log \frac{[\text{BT}^{2-}]}{[\text{BTH}^-]}$, on a $[\text{BTH}^-] = [\text{BT}^{2-}]$ lorsque $\text{pH} = \text{p}K_A$: le $\text{p}K_A$ est l'abscisse du point où les courbes de BTH^- et de BT^{2-} se croisent, à 50 % chacune. Sur la figure 5, ce croisement a lieu pour $\text{pH} \approx 8,9$ (le point d'intersection, à 50 %, est situé juste à gauche de la graduation 9, entre les points de mesure de pH 8,8 et 9,0 ; une lecture $\text{p}K_A \approx 9,0$ est acceptable) :

$$\text{p}K_A(\text{BTH}^-/\text{BT}^{2-}) \approx 8,9.$$

De même le premier croisement, vers $\text{pH} \approx 1,5$, donne le $\text{p}K_A$ du couple $\text{BTH}_2 / \text{BTH}^-$: la forme BTH_2 n'existe qu'en milieu très acide.

Zone de virage et titrage. La zone de virage d'un indicateur est l'intervalle $[\text{p}K_A - 1 ; \text{p}K_A + 1]$, soit ici environ $[7,9 ; 9,9]$, comparable à celle de la phénolphthaléine $[8,2 ; 9,9]$. Sur la figure 4, le saut de pH se produit pour $V_E = 10,0 \text{ mL}$ (volume attendu : $C_A V_A = C_B V_E$ avec $C_A = C_B$) et le pH passe brutalement d'environ 6,5 à 10,5 ; le pH à l'équivalence, au milieu du saut, vaut $\text{pH}_E \approx 8,5$ (valeur théorique 8,7 : basique, comme toujours pour un acide faible titré par une base forte). Ce pH appartient à la zone de virage du bleu de thymol : l'indicateur change de couleur pour un volume versé égal à V_E à une goutte près, exactement comme la phénolphthaléine. Le bleu de thymol **peut donc remplacer la phénolphthaléine** pour le titrage d'un acide faible par une base forte, avec l'avantage de ne pas être classé CMR.

Couleurs observées. Une solution absorbe certaines radiations et prend la couleur *complémentaire* de la couleur absorbée (diamétralement opposée sur le cercle chromatique).

- Avant l'équivalence, $\text{pH} \approx 3$ à 6, soit $1,5 < \text{pH} < 8,9$: la forme prédominante est BTH^- (100 % sur la figure 5). Son spectre (figure 6) présente un maximum d'absorption vers $\lambda_{\text{max}} \approx 435 \text{ nm}$, dans le violet : la solution apparaît de la couleur complémentaire, le **jaune**.

- Après l'équivalence, $\text{pH} > 10$: la forme prédominante est BT^{2-} , qui absorbe vers $\lambda_{\text{max}} \approx 595 \text{ nm}$, dans l'orange : la solution apparaît **bleue**.
- (La forme BTH_2 , qui absorbe vers 545 nm dans le vert et apparaît rouge, n'est jamais présente ici puisque le pH reste supérieur à $2,9$.)

Lors du titrage, la solution passe donc du **jaune au bleu** à l'équivalence (par une teinte verte intermédiaire), changement plus net que le passage de l'incolore au rose de la phénolphthaléine.

Q15. On compare la valeur expérimentale $x = 8,9$ (lecture sur la figure 5) à la valeur de référence $x_{\text{ref}} = 8,9$ avec $u(x) = 0,2$:

$$\frac{|x - x_{\text{ref}}|}{u(x)} = \frac{|8,9 - 8,9|}{0,2} = 0 < 2.$$

Le quotient est inférieur à 2 : la valeur expérimentale est **en accord** avec la valeur tabulée.

Même avec la lecture $\text{p}K_A \approx 9,0$, on obtient $\frac{|9,0 - 8,9|}{0,2} = 0,5 < 2$: l'accord subsiste, l'écart de lecture étant très inférieur à l'incertitude-type de la méthode. *Ce que le correcteur attend* : le calcul explicite du quotient et le critère « inférieur à 2 » énoncé avant la conclusion.

Exercice 2

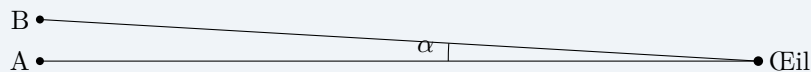
Sujet — Observation d'un avion en vol — 5 points

Le trafic aérien est source de fascination pour beaucoup de gens. Notre observation se limite souvent à la traînée de l'avion dans le ciel ou, plus récemment, à un suivi en direct (trajectoire, vitesse, altitude) grâce à des applications en ligne.

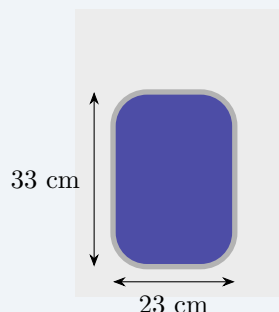
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'observation, avec une lunette astronomique afocale commerciale, de certains détails de la structure d'un avion de type A312 en vol, puis de déterminer la vitesse de cet avion en phase d'atterrissage grâce à un enregistrement du son émis par le moteur.

Données :

- les valeurs du grossissement G de la lunette astronomique utilisée sont comprises entre 16 et 48 ;
- un observateur peut distinguer deux points différents A et B d'un objet si l'angle α sous lequel ces deux points sont vus depuis le point d'observation (voir figure ci-dessous) est supérieur ou égal à $3,0 \times 10^{-4}$ rad ;



- approximation dans le cas des petits angles ($\alpha \ll 1$ rad) : $\tan(\alpha) = \alpha$;
- quelques données concernant un avion A312 :
 - longueur de l'avion : $L = 44,5$ m ;
 - altitude de vol de croisière de l'avion : $h = 10,4$ km ;
 - vitesse de vol de croisière de l'avion : $v_c = 863$ km $\cdot$ h $^{-1}$;
 - hublot de l'avion A312 :



1. Observation d'un avion A312 avec une lunette astronomique **Q1.** Donner la définition d'une lunette afocale.

Q2. Sur le schéma **en annexe à rendre avec la copie**, placer le foyer objet F_2 puis le foyer image F'_2 de l'oculaire de la lunette astronomique.

L'avion vole à la verticale de l'observateur et se trouve donc à la distance h de celui-ci.

Sur le schéma **en annexe à rendre avec la copie**, les extrémités avant et arrière de l'avion observé sont respectivement modélisées par les points A_∞ et B_∞ , situés à une très grande distance de l'observateur.

Q3. Construire, sur le schéma **en annexe à rendre avec la copie**, la marche des deux rayons lumineux issus de B_∞ qui émergent de la lunette, en faisant apparaître l'image intermédiaire A_1B_1 .

L'angle α désigne l'angle sous lequel l'avion est observé à l'œil nu. L'angle sous lequel l'avion est observé au travers de l'oculaire de la lunette astronomique est nommé α' .

Q4. Vérifier à l'aide d'un calcul que l'on peut distinguer, à l'œil nu, l'avant de l'avion de sa queue.

Q5. Après avoir placé les angles α et α' sur le schéma **en annexe à rendre avec la copie**, rappeler l'expression du grossissement G d'une lunette astronomique en fonction des angles α et α' .

Q6. Déterminer si on peut distinguer l'un de l'autre les deux bords verticaux d'un hublot de l'avion, à l'aide de la lunette astronomique étudiée.

2. Détermination de la vitesse d'un avion A312 en phase d'atterrissage Au voisinage de l'aéroport, un observateur enregistre le son du moteur de l'avion passant au-dessus de lui lors de sa phase d'atterrissage. L'observateur est supposé fixe lors de l'enregistrement du son. L'analyse du signal sonore enregistré permet de déterminer les fréquences des signaux reçus par l'observateur. Lorsque l'avion s'avance en direction de l'observateur la fréquence mesurée est $f_A = 2,2$ kHz, et lorsqu'il s'éloigne la fréquence est $f_E = 1,5$ kHz.

Q7. Donner le nom du phénomène mis en jeu dans cette expérience.

On note f_0 la fréquence du signal émis par la source immobile, c la vitesse du son dans l'air dans les conditions de l'expérience et v la vitesse de l'avion par rapport au sol. On donne $c = 345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

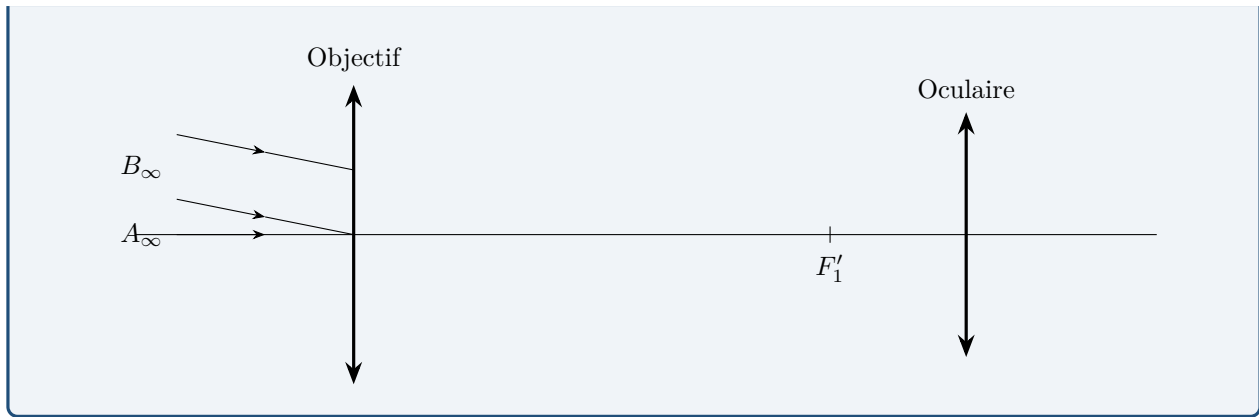
Q8. Parmi les propositions A, B, C et D suivantes, choisir et recopier sur la copie la proposition correcte. Expliquer pourquoi les autres propositions sont à écarter.

A	B	C	D
$f_A = \frac{c}{c-v}$	$f_A = f_0 \cdot \frac{c}{c-v}$	$f_A = f_0 \cdot \frac{c}{c+v}$	$f_A = f_0 \cdot \frac{c}{c-2v}$
$f_E = \frac{c}{c+v}$	$f_E = f_0 \cdot \frac{c}{c+v}$	$f_E = f_0 \cdot \frac{c}{c-v}$	$f_E = f_0 \cdot \frac{c}{c+v}$

Q9. Déterminer la vitesse v de l'avion, exprimée en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, lors de cet atterrissage. Commenter.

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti. La démarche est évaluée et nécessite d'être correctement présentée.

Annexe à rendre avec la copie (le schéma du sujet, tourné d'un quart de tour pour tenir sur la page, est reproduit ici avec l'axe optique horizontal)



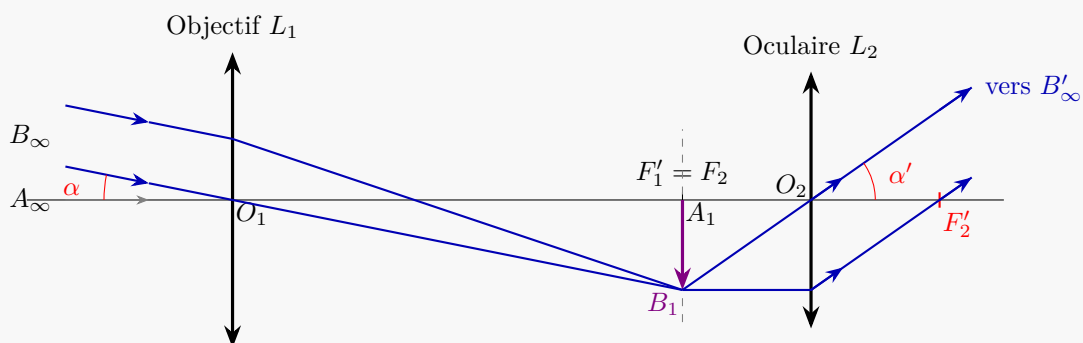
Corrigé

1. Observation avec une lunette astronomique Q1. Une lunette astronomique est **afocale** lorsque l'image définitive d'un objet situé à l'infini est elle-même rejetée à l'infini : l'œil observe alors sans accommoder. Cette condition est réalisée lorsque le foyer image de l'objectif est confondu avec le foyer objet de l'oculaire, $F'_1 = F_2$; la distance entre les deux lentilles vaut alors $O_1O_2 = f'_1 + f'_2$.

Q2. La lunette étant afocale, le foyer objet de l'oculaire F_2 est **confondu avec** F'_1 . Le foyer image F'_2 est le symétrique de F_2 par rapport au centre optique O_2 de l'oculaire : il se place sur l'axe, à la distance $f'_2 = O_2F_2$ à droite de l'oculaire (schéma ci-dessous).

Q3. Construction. Les deux rayons issus de B_∞ arrivent parallèles entre eux, inclinés de l'angle α sur l'axe.

- Le rayon passant par le centre optique O_1 de l'objectif n'est pas dévié : il coupe le plan focal image de l'objectif (plan perpendiculaire à l'axe en F'_1) au point B_1 . Le second rayon, parallèle au premier, converge au même point B_1 après l'objectif (des rayons incidents parallèles convergent en un même point du plan focal image).
- A_∞ , sur l'axe, a pour image $A_1 = F'_1$: l'image intermédiaire A_1B_1 est réelle, renversée, située dans le plan focal image de l'objectif, qui est aussi le plan focal objet de l'oculaire.
- A_1B_1 sert d'objet à l'oculaire. B_1 étant dans le plan focal objet de l'oculaire, les rayons qui en sont issus émergent **parallèles entre eux**, dans la direction du rayon B_1O_2 qui passe par le centre optique sans être dévié (le rayon issu de B_1 parallèle à l'axe, lui, ressort en passant par le foyer image F'_2 , ce qui confirme la direction) : l'image définitive B' est à l'infini, dans la direction inclinée de α' sur l'axe.



Q4. Vu depuis le sol, l'avion (longueur L) à l'altitude h est observé sous l'angle α tel que $\tan \alpha = \frac{L}{h}$, soit, dans l'approximation des petits angles,

$$\alpha \approx \frac{L}{h} = \frac{44,5}{10,4 \times 10^3} = 4,28 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

(Les deux longueurs sont exprimées dans la même unité : $h = 10,4 \text{ km} = 1,04 \times 10^4 \text{ m}$.) Comme $\alpha = 4,3 \times 10^{-3} \text{ rad} > 3,0 \times 10^{-4} \text{ rad}$ (environ 14 fois la limite de résolution), on distingue bien, à l'œil nu, l'avant de l'avion de sa queue. L'approximation est légitime : $\alpha \approx 0,25^\circ \ll 1 \text{ rad}$.

Q5. Sur le schéma, α est l'angle entre l'axe optique et les rayons incidents issus de B_∞ (mesuré en O_1) : c'est l'angle sous lequel l'œil nu voit l'avion. L'angle α' est l'angle entre l'axe optique et les rayons émergents (mesuré en O_2) : c'est l'angle sous lequel l'œil voit l'image à travers la lunette. Le **grossissement** est le rapport de ces deux angles :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad (\text{et, pour une lunette afocale, } G = \frac{f'_1}{f'_2}).$$

Sur le schéma, on lit d'ailleurs $A_1B_1 = f'_1 \alpha = f'_2 \alpha'$ (rayons non déviés par O_1 puis par O_2), ce qui redonne $G = f'_1/f'_2 = 7/2 = 3,5$ pour les distances focales du dessin.

Q6. Les deux bords verticaux d'un hublot sont distants de sa largeur $\ell = 23 \text{ cm} = 0,23 \text{ m}$. À l'œil nu, ils sont vus sous l'angle

$$\alpha_h \approx \frac{\ell}{h} = \frac{0,23}{1,04 \times 10^4} = 2,2 \times 10^{-5} \text{ rad} < 3,0 \times 10^{-4} \text{ rad} :$$

impossible de les distinguer à l'œil nu (il faudrait un angle 14 fois plus grand). À travers la lunette, l'angle devient $\alpha'_h = G \alpha_h$. Avec le plus faible grossissement, $G = 16$:

$$\alpha'_h = 16 \times 2,2 \times 10^{-5} = 3,5 \times 10^{-4} \text{ rad} \geq 3,0 \times 10^{-4} \text{ rad},$$

et avec le plus fort, $G = 48$: $\alpha'_h = 48 \times 2,2 \times 10^{-5} = 1,1 \times 10^{-3} \text{ rad}$, très supérieur à la limite.

Oui, la lunette permet de distinguer les deux bords verticaux d'un hublot, quel que soit le grossissement choisi entre 16 et 48 — de justesse pour $G = 16$, confortablement pour $G = 48$. *Ce que le correcteur attend* : la largeur convertie en mètres, la comparaison de α_h puis de $G\alpha_h$ à $3,0 \times 10^{-4} \text{ rad}$, et l'examen des deux valeurs extrêmes de G .

2. Vitesse de l'avion à l'atterrissage **Q7.** Il s'agit de l'**effet Doppler** : la fréquence du son reçu par un observateur fixe diffère de la fréquence émise lorsque la source (le moteur de l'avion) est en mouvement — plus élevée quand la source se rapproche, plus basse quand elle s'éloigne.

Q8. La proposition correcte est la **proposition B** :

$$f_A = f_0 \cdot \frac{c}{c - v} \quad \text{et} \quad f_E = f_0 \cdot \frac{c}{c + v}.$$

Justification. Lorsque la source se rapproche à la vitesse v , elle rattrape les fronts d'onde émis vers l'avant : la longueur d'onde perçue est raccourcie, $\lambda_A = (c - v)T_0$, d'où $f_A = \frac{c}{\lambda_A} = f_0 \frac{c}{c - v} > f_0$.

Lorsqu'elle s'éloigne, $\lambda_E = (c + v)T_0$ et $f_E = f_0 \frac{c}{c + v} < f_0$. On vérifie que les deux expressions redonnent f_0 pour $v = 0$.

- *A* est à écarter par **analyse dimensionnelle** : $\frac{c}{c - v}$ est un rapport de deux vitesses, sans dimension, alors que f_A est une fréquence (en Hz) ; il manque le facteur f_0 .
- *C* est à écarter car les rôles sont inversés : elle donne $f_A = f_0 \frac{c}{c + v} < f_0$ pour un rapprochement, alors que la fréquence perçue doit *augmenter* quand la source se rapproche (son plus aigu), et $f_E > f_0$ pour un éloignement.
- *D* est à écarter car le facteur $2v$ n'a pas de raison d'être ici (il apparaît pour une onde *réfléchie* par un obstacle mobile, comme dans un radar, où l'effet Doppler joue deux fois) ; de plus la proposition n'est pas symétrique entre le rapprochement ($c - 2v$) et l'éloignement ($c + v$).

Q9. Démarche. La fréquence émise f_0 est inconnue : on l'élimine en faisant le **rapport** des deux relations de la proposition B, puis on isole v .

$$\frac{f_A}{f_E} = \frac{c+v}{c-v} \implies f_A(c-v) = f_E(c+v) \implies v(f_A + f_E) = c(f_A - f_E),$$

$$v = c \frac{f_A - f_E}{f_A + f_E}.$$

Application numérique (les fréquences peuvent rester en kHz, leur rapport étant sans dimension) :

$$v = 345 \times \frac{2,2 - 1,5}{2,2 + 1,5} = 345 \times \frac{0,7}{3,7} = 65,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Conversion : $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, donc

$$v = 65,27 \times 3,6 = 235 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \approx 2,3 \times 10^2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

(deux chiffres significatifs, comme les fréquences ; $234,97 \text{ s'arrondit à } 2,3 \times 10^2$, et un correcteur accepterait aussi $2,4 \times 10^2$ selon les arrondis intermédiaires). On peut vérifier la cohérence en calculant la fréquence émise : $f_0 = f_A \frac{c-v}{c} = 2,2 \times \frac{345 - 65,3}{345} = 1,8 \text{ kHz}$, bien comprise entre f_E et f_A (la relation de f_E redonne la même valeur).

Commentaire. Une vitesse d'environ $235 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ est très inférieure à la vitesse de croisière $v_c = 863 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (près de quatre fois moins) : c'est cohérent avec une phase d'atterrissage, où un avion de ligne se présente à environ $250 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. La précision est limitée : f_A et f_E ne sont données qu'avec deux chiffres significatifs (soit à $\pm 0,05 \text{ kHz}$), ce qui entraîne une incertitude de l'ordre de 15 % sur v (entre $2,0 \times 10^2$ et $2,7 \times 10^2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ selon les valeurs extrêmes des fréquences). Enfin, les relations utilisées supposent que l'avion se déplace le long de la direction observateur-source : elles s'appliquent quand l'avion est encore loin (à l'approche puis à l'éloignement), la fréquence passant continûment de f_A à f_E lorsqu'il survole l'observateur. *Ce que le correcteur attend* : l'élimination de f_0 par le rapport (et non une valeur de f_0 inventée), la formule littérale avant le calcul, la conversion en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ et une comparaison chiffrée avec v_c .

Exercice 3

Sujet — Accéléromètre d'un mobile multifonction — 6 points

Les mobiles multifonctions, souvent appelés smartphones, sont équipés de plusieurs capteurs leur permettant d'être utilisés comme des instruments de mesure. Par exemple, la plupart des smartphones disposent d'un accéléromètre, capteur qui permet de mesurer l'accélération à laquelle le téléphone est soumis.

L'objectif de cet exercice est d'établir un modèle de la force de frottement s'exerçant sur un smartphone chutant dans l'air, à l'aide des mesures d'accélération fournies par l'accéléromètre embarqué.

Données :

- masse du smartphone utilisé : $m = 182 \text{ g}$;
- intensité de la pesanteur terrestre : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- dans tout l'exercice, on ne tient pas compte de la poussée d'Archimède exercée par l'air sur le smartphone.

Le mouvement du centre de masse G du smartphone est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen, muni d'un repère d'espace d'axe (Oz) , vertical, orienté vers le haut et de vecteur unitaire $\vec{k}$ (voir figure 1). À la date $t = 0$, le smartphone est lâché à plat, avec une vitesse initiale nulle. Son centre de masse G se trouve alors au point H de coordonnée $z = h$. Il est réceptionné quelques instants plus tard sur un coussin posé au sol. Lorsque le smartphone est en contact avec le coussin, son centre de masse est à l'altitude $z = 0$.

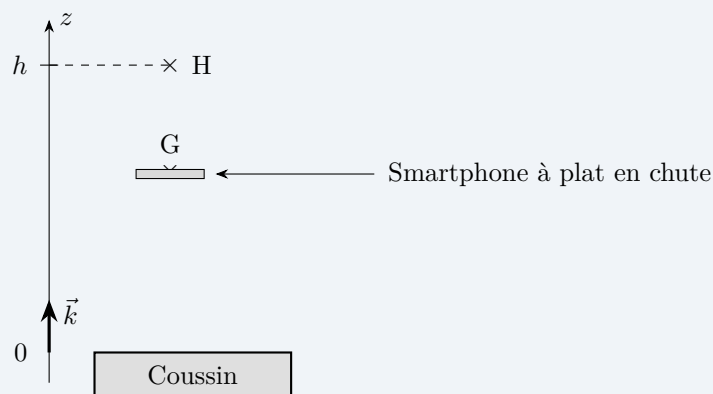


Figure 1. Modélisation de la chute du smartphone

1. Modèle de la chute libre sans frottement On fait tout d'abord l'hypothèse que le smartphone est en mouvement de chute libre verticale. On ne tient donc pas compte des forces de frottement exercées par l'air sur le smartphone en mouvement.

Q1. Dans ce modèle, faire un bilan des forces appliquées au système {smartphone}. En déduire l'expression de la coordonnée a_z de l'accélération du centre de masse G du système.

Q2. Établir l'expression de la coordonnée $v_z(t)$ de la vitesse du centre de masse G du système puis montrer que l'équation horaire de l'altitude $z(t)$ du centre de masse G a pour expression :

$$z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h$$

On choisit l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP}(z)$ au niveau de l'origine de l'axe (Oz) : $E_{PP}(z = 0) = 0$.

Q3. Justifier que l'énergie mécanique E_M du smartphone est constante et qu'elle a pour expression : $E_M = m \cdot g \cdot h$.

2. Étude expérimentale de la chute du smartphone Pour confronter le modèle de chute libre sans frottement à l'expérience, on lâche à la date $t = 0$ un téléphone équipé d'un accéléromètre, avec une vitesse initiale nulle depuis la hauteur $h = 1,70$ m. La figure 2 est obtenue à partir des valeurs de l'accélération enregistrées par le capteur entre le lâcher du téléphone et la date $t = 0,47$ s.

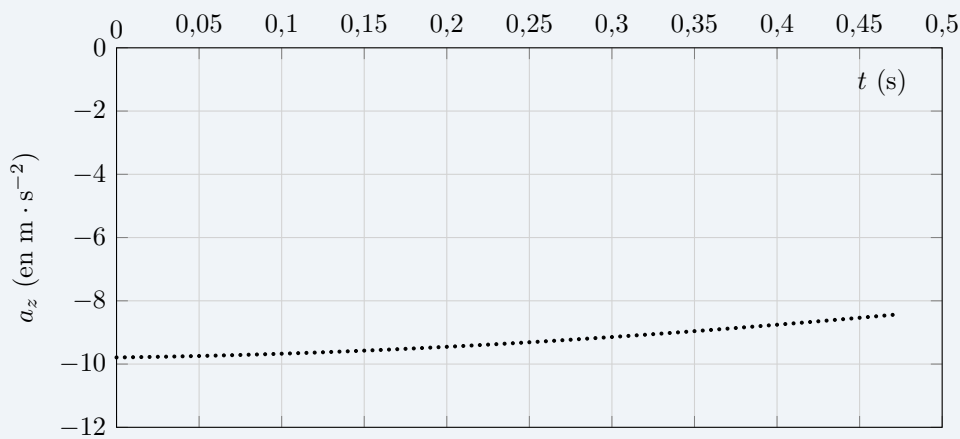


Figure 2. Accélération verticale a_z du smartphone en fonction du temps t

Q4. Indiquer, en justifiant, si l'évolution temporelle de la valeur de la composante a_z de l'accélération obtenue expérimentalement est compatible avec le modèle de chute libre sans frottement.

Le traitement des données acquises permet de tracer l'évolution temporelle de trois formes d'énergies du smartphone : énergie potentielle de pesanteur $E_{PP}(t)$, énergie cinétique $E_C(t)$ et énergie mécanique $E_M(t)$, comme représenté sur la figure 3.

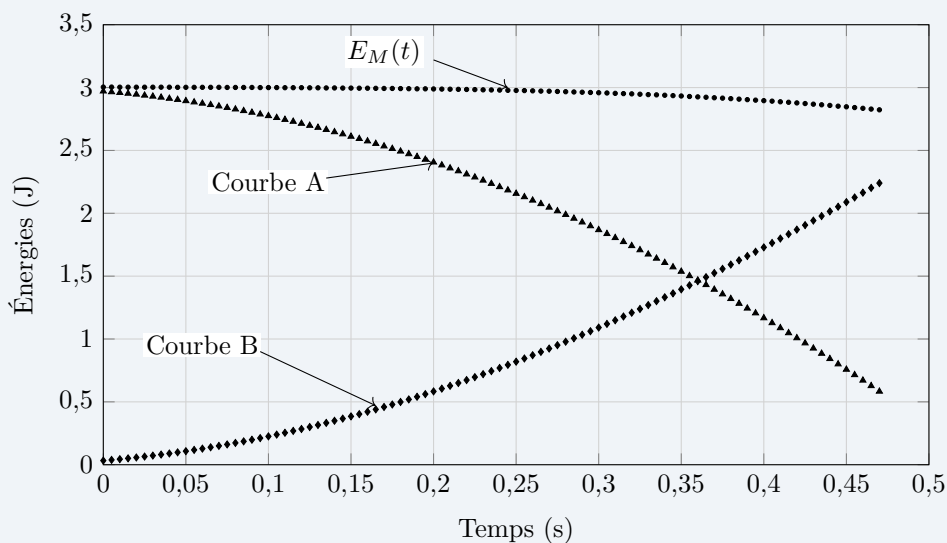


Figure 3. Représentations graphiques de $E_{PP}(t)$, $E_C(t)$ et $E_M(t)$ lors de la chute du smartphone

Q5. Associer, en justifiant, chaque courbe d'évolution temporelle A et B de la figure 3 à la forme d'énergie correspondante.

Q6. Montrer, à partir de la figure 3, que la vitesse du smartphone est proche de $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à la date $t = 0,45 \text{ s}$.

Les actions de frottement de l'air sur le smartphone sont représentées par une force $\vec{f}$ verticale et dirigée vers le haut. Cette force est nulle lorsque la vitesse du smartphone est nulle.

Q7. En appliquant la deuxième loi de Newton au système {smartphone}, montrer que la coordonnée verticale de la force de frottement vérifie :

$$f = m \cdot (a_z + g)$$

Les données expérimentales permettent de représenter les variations de la composante verticale de l'accélération a_z du smartphone en fonction du carré v^2 de sa vitesse. Les résultats sont représentés sur la figure 4. Les données expérimentales sont correctement représentées par une modélisation affine :

$$a_z = 0,0555 \times v^2 - 9,80 \quad \text{où } a_z \text{ est exprimée en } \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ et } v \text{ en } \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

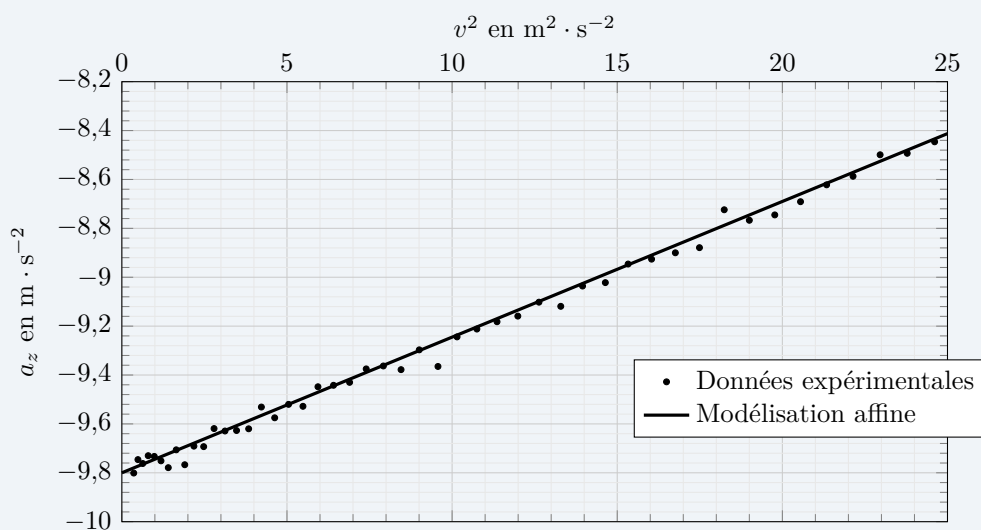


Figure 4. Modélisation de la représentation de a_z en fonction de v^2

Q8. Déterminer la valeur expérimentale de l'intensité de la pesanteur g que l'on peut déduire de cette expérience.

Q9. Montrer que l'on peut déduire de ces résultats que la force de frottement exercée par l'air peut s'écrire $f = k \cdot v^2$ où k est un coefficient dont on donnera la valeur et l'unité.

Q10. Calculer la valeur f de la force de frottement en fin de chute. Comparer cette valeur à celle du poids du smartphone et commenter.

Corrigé

1. Modèle de la chute libre sans frottement **Q1.** *Système* : le smartphone, de masse m , assimilé à son centre de masse G. *Référentiel* : terrestre, supposé galiléen. *Bilan des forces* : dans le modèle de la chute libre, sans frottement et en négligeant la poussée d'Archimède, la seule force appliquée est le **poids** $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$ (vertical, vers le bas, de valeur mg). *Deuxième loi de Newton* : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, soit $m\vec{g} = m\vec{a}$, d'où $\vec{a} = \vec{g}$. En projection sur l'axe (Oz) orienté vers le haut :

$$a_z = -g.$$

L'accélération est constante, indépendante de la masse, dirigée vers le bas.

Q2. Par définition, $a_z = \frac{dv_z}{dt} = -g$. En intégrant par rapport au temps : $v_z(t) = -gt + v_z(0)$. Le smartphone est lâché sans vitesse initiale, $v_z(0) = 0$, donc

$$v_z(t) = -gt.$$

(La vitesse est négative : le mouvement se fait vers les z décroissants, et sa valeur $|v_z| = gt$ croît linéairement.) De même $v_z = \frac{dz}{dt} = -gt$ s'intègre en $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + z(0)$, et la condition initiale $z(0) = h$ (G est en H à $t = 0$) donne

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h.$$

Q3. Le poids est une force **conservative** : c'est la seule force qui travaille (il n'y a ni frottement ni autre force non conservative dans ce modèle). D'après le théorème de conservation de l'énergie mécanique, $E_M = E_C + E_{PP}$ est **constante** au cours de la chute. Il suffit donc de la calculer à la date $t = 0$: la vitesse initiale est nulle, $E_C(0) = \frac{1}{2}m \times 0^2 = 0$, et G est à l'altitude h , $E_{PP}(0) = mgh$ (avec l'origine choisie $E_{PP}(0) = 0$ en $z = 0$). Ainsi

$$E_M = 0 + mgh = mgh.$$

Vérification directe à une date t quelconque : $E_C = \frac{1}{2}mv_z^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2$ et $E_{PP} = mgz = mgh - \frac{1}{2}mg^2t^2$, dont la somme vaut bien mgh , indépendante de t . Numériquement, avec $h = 1,70$ m : $E_M = 0,182 \times 9,81 \times 1,70 = 3,04$ J.

2. Étude expérimentale **Q4.** Dans le modèle de chute libre, $a_z = -g = -9,81$ m · s⁻² est *constante* : la courbe $a_z(t)$ devrait être une droite horizontale. Sur la figure 2, on lit $a_z \approx -9,8$ m · s⁻² à $t = 0$ (en accord avec $-g$ au moment du lâcher, quand la vitesse est nulle), mais a_z **augmente ensuite régulièrement** en valeur algébrique, jusqu'à $a_z \approx -8,4$ m · s⁻² à $t = 0,47$ s : la valeur absolue de l'accélération diminue de 14 % au cours de la chute. L'évolution expérimentale n'est donc **pas compatible** avec le modèle de chute libre sans frottement, sauf dans les tout premiers instants : une force opposée au poids, croissante avec la vitesse — le frottement de l'air —, freine de plus en plus le smartphone.

Q5. Au cours de la chute, l'altitude z diminue, donc $E_{PP} = mgz$ **diminue**, tandis que la vitesse augmente, donc $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ **augmente**.

- La **courbe A** décroît de 3,0 J environ à $t = 0$ jusqu'à 0,55 J à $t = 0,47$ s : c'est l'**énergie potentielle de pesanteur** $E_{PP}(t)$. Sa valeur initiale est cohérente avec $mgh = 0,182 \times 9,81 \times 1,70 = 3,0$ J.
- La **courbe B** croît à partir d'une valeur quasi nulle (vitesse initiale nulle) jusqu'à 2,25 J : c'est l'**énergie cinétique** $E_C(t)$.

On vérifie qu'à chaque date la somme des deux courbes redonne $E_M(t)$, qui décroît légèrement (de 3,0 à 2,85 J) : cette perte d'énergie mécanique d'environ 5 % est le travail résistant des frottements de l'air.

Q6. Sur la figure 3, à $t = 0,45$ s, on lit sur la courbe B : $E_C \approx 2,1$ J (le point est situé un peu au-dessus de la graduation 2 J). Comme $E_C = \frac{1}{2}mv^2$,

$$v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 2,1}{0,182}} = \sqrt{23} = 4,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Autre lecture possible : $E_C = E_M - E_{PP}$ avec $E_M \approx 2,85$ J et $E_{PP} \approx 0,7$ J (courbe A à 0,45 s), soit $E_C \approx 2,1$ à 2,2 J et $v = 4,8$ à 4,9 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, même résultat. La vitesse en fin de chute est bien proche de 5 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (soit 18 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$). *Ce que le correcteur attend :* la masse en kilogrammes (0,182 kg) et la racine carrée.

Q7. *Système :* le smartphone ; *référentiel :* terrestre galiléen ; *bilan des forces :* le poids $\vec{P} = -mg\vec{k}$ et la force de frottement $\vec{f} = f\vec{k}$, verticale vers le haut ($f \geq 0$ est sa coordonnée sur $\vec{k}$). *Deuxième loi de Newton :*

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a} \implies \text{en projection sur } (Oz) : -mg + f = ma_z,$$

d'où

$$f = ma_z + mg = m(a_z + g).$$

On retrouve $f = 0$ lorsque $a_z = -g$ (chute libre, vitesse nulle) et $f > 0$ dès que $a_z > -g$, ce qui est le cas sur la figure 2.

Q8. La force de frottement est nulle quand la vitesse est nulle : pour $v = 0$, $f = 0$ et donc $a_z = -g$ d'après Q7. L'ordonnée à l'origine de la modélisation affine, $a_z(v^2 = 0) = -9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, fournit ainsi la valeur expérimentale

$$g_{\text{exp}} = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

en excellent accord avec la valeur de référence $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (écart relatif de 0,1 %). L'accéléromètre du smartphone est donc bien étalonné.

Q9. En reportant la modélisation $a_z = 0,0555v^2 - 9,80$ dans l'expression de Q7, et en utilisant la valeur expérimentale $g_{\text{exp}} = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ issue de la même série de mesures :

$$f = m(a_z + g) = m(0,0555v^2 - 9,80 + 9,80) = 0,0555mv^2.$$

La force de frottement est donc proportionnelle au carré de la vitesse, $f = kv^2$, avec

$$k = 0,0555 \times m = 0,0555 \times 0,182 = 1,01 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Unité : le coefficient 0,0555 est en m^{-1} (rapport d'une accélération, $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, à un carré de vitesse, $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$), donc k est en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$; on peut aussi l'écrire $\text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$, puisque f (en N) = kv^2 (en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$). *Ce que le correcteur attend :* la simplification $-9,80 + 9,80 = 0$ justifiée par la valeur expérimentale de g (avec 9,81 il resterait un terme constant de 2×10^{-3} N, négligeable) et m en kg.

Q10. En fin de chute ($t \approx 0,45$ à $0,47$ s), $v \approx 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (Q6), donc

$$f = kv^2 = 1,01 \times 10^{-2} \times 5^2 = 0,25 \text{ N}$$

(avec la valeur $v = 4,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ de Q6, $f = 0,23 \text{ N}$: même ordre de grandeur). On peut vérifier avec la figure 2 : $f = m(a_z + g) = 0,182 \times (-8,4 + 9,81) = 0,26 \text{ N}$, valeur cohérente. Le poids du smartphone vaut

$$P = m g = 0,182 \times 9,81 = 1,79 \text{ N}.$$

Le rapport $\frac{f}{P} = \frac{0,25}{1,79} \approx 0,14$: en fin de chute, le frottement de l'air représente environ **14 % du poids**. Il reste nettement inférieur au poids — le smartphone continue d'accélérer, on est loin de la vitesse limite $v_{\text{lim}} = \sqrt{g/0,0555} \approx 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pour laquelle f compenserait P —, mais il n'est **pas négligeable** : c'est lui qui explique la diminution de $|a_z|$ (figure 2) et la baisse de 5 % de l'énergie mécanique (figure 3). Le modèle de la chute libre sans frottement n'est donc acceptable qu'au tout début de la chute, tant que la vitesse reste faible ; au-delà, le modèle $f = kv^2$ rend correctement compte des mesures de l'accéléromètre. *Ce que le correcteur attend* : le calcul du poids en newtons avec m en kg, un rapport chiffré et une phrase de conclusion sur la validité du modèle.