

Physique-chimie

Baccalauréat général 2026 — épreuve de spécialité

Polynésie, session 2026 (26-PYCJ1P01)

Corrigé

Trois exercices

Exercice 1

Sujet — Synthèse d'une coumarine — 9 points

La synthèse de la coumarine fut l'une des premières synthèses réalisées vers la fin du XIX^e siècle par le chimiste anglais William H. Perkin. Les coumarines possèdent des propriétés anticoagulantes. La famille des coumarines est formée des composés dérivés de la coumarine simple de formule brute $C_9H_6O_2$, dont la formule topologique est représentée en figure 1.

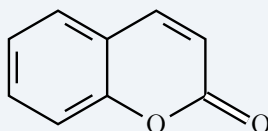


Figure 1. Formule topologique de la coumarine simple

L'objectif de cet exercice est de comparer deux méthodes de synthèse d'une coumarine ainsi que leurs rendements. L'une de ces méthodes met en jeu de l'acide sulfamique, dont les propriétés sont étudiées en première partie, les deux autres parties étant consacrées aux méthodes de synthèse proprement dites.

1. Étude de l'acide sulfamique par pH-métrie Donnée : concentration en quantité de matière standard $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Q1. Montrer que, pour une solution aqueuse d'un acide fort quelconque AH appartenant à un couple AH/A^- de concentration en quantité de matière apportée en acide fort C , le pH de la solution s'exprime par la relation $\text{pH} = -\log\left(\frac{C}{c^\circ}\right)$.

On souhaite s'assurer que l'acide sulfamique, de formule $\text{NH}_2\text{SO}_3\text{H}$, a un comportement d'acide fort par des mesures de pH. Cet acide appartient au couple acide-base $\text{NH}_2\text{SO}_3\text{H}(\text{aq})/\text{NH}_2\text{SO}_3^-(\text{aq})$.

On commence par préparer, à partir d'une solution S d'acide sulfamique de concentration en quantité de matière $C = 1,0 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, une solution S_1 d'acide sulfamique de volume $V_1 = 100,0 \text{ mL}$ et de concentration $C_1 = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Q2. Calculer le volume V' de solution S à prélever et détailler le protocole pour préparer la solution S_1 .

Q3. Écrire l'équation modélisant la réaction entre l'acide sulfamique et l'eau.

On réalise ensuite plusieurs solutions aqueuses S_n d'acide sulfamique de concentrations C_n en quantités de matière différentes dont on mesure la valeur du pH. L'évolution du pH mesuré en fonction de $-\log\left(\frac{C_n}{c^\circ}\right)$ est représentée sur la figure 2.

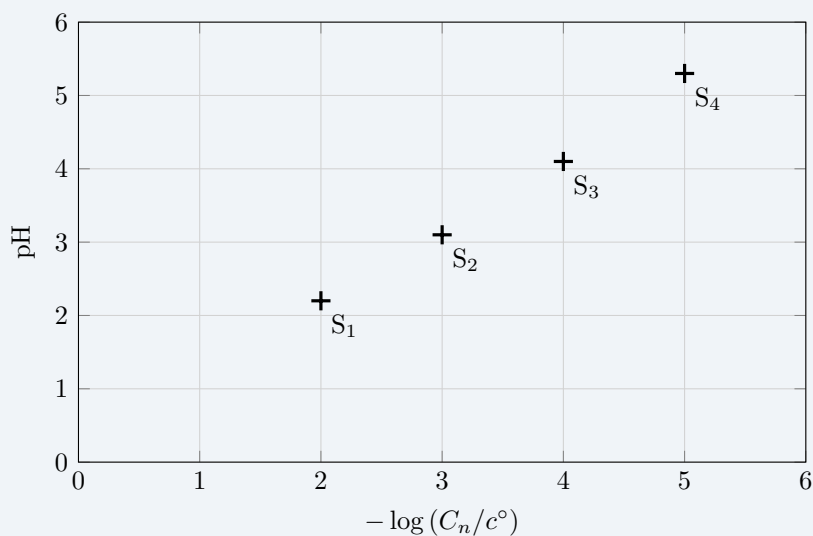
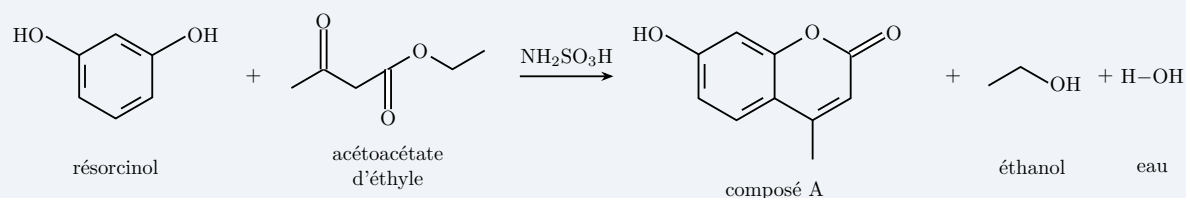


Figure 2. Évolution de la valeur du pH en fonction de $-\log(C_n/c^\circ)$

Q4. À l'aide de la figure 2, vérifier que l'acide sulfamique peut être considéré comme un acide fort.

2. Synthèse d'une coumarine en présence d'acide sulfamique On étudie la synthèse du composé 7-hydroxy-4-méthylcoumarine, dérivé de la coumarine simple et noté « composé A », en présence d'acide sulfamique. La transformation chimique est modélisée par l'équation de réaction représentée ci-dessous.



Cette transformation est effectuée en 20 minutes à la température de 130 °C. On réalise le spectre infrarouge du produit obtenu, il est représenté figure 3.

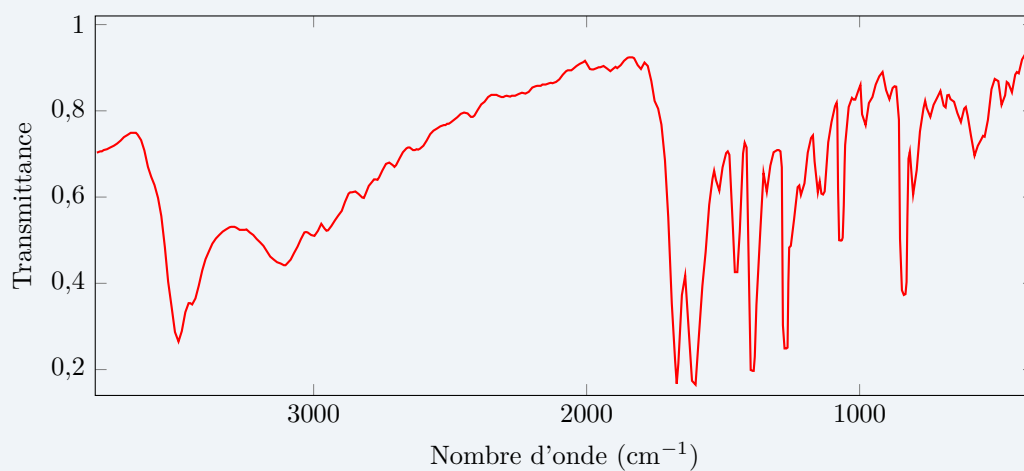


Figure 3. Spectre infrarouge du produit obtenu

Données : table de données pour la spectroscopie infrarouge.

Liaison	σ (cm ⁻¹)	Intensité
O–H	3500 – 3700	Forte, fine
O–H acide carboxylique	2500 – 3200	Forte à moyenne, large
C=O	1650 – 1740	Forte
C–O	1040 – 1300	Forte à moyenne
N–H	1560 – 1640	Forte à moyenne

Q5. Montrer que le spectre infrarouge du produit obtenu est compatible avec la structure de la molécule de la 7-hydroxy-4-méthylcoumarine (composé A).

Les propriétés physicochimiques des divers composés considérés sont présentées dans le tableau ci-après.

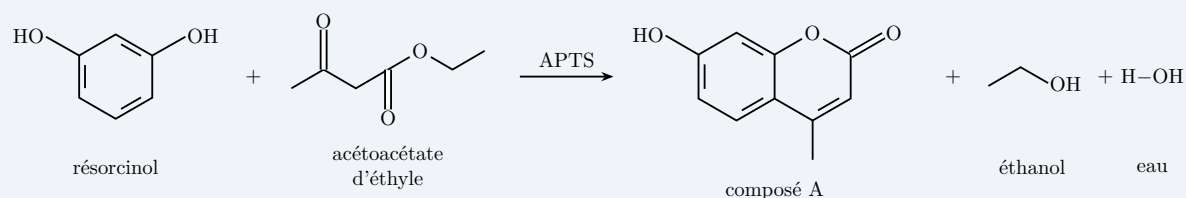
	Résorcinol	Acétylacétate d'éthyle	Composé A 7-hydroxy-4-méthylcoumarine
Formule chimique	C ₆ H ₆ O ₂	C ₆ H ₁₀ O ₃	C ₁₀ H ₈ O ₃
Masse molaire M (g · mol ⁻¹)	110	130	176
Densité d	1,08	–	–

On réalise la réaction en introduisant dans un ballon un volume $V_R = 11,1$ mL de résorcinol et une masse $m_{AE} = 14,2$ g d'acétylacétate d'éthyle.

Le produit obtenu, après purification, est sous forme de cristaux de masse $m = 12,4$ g.

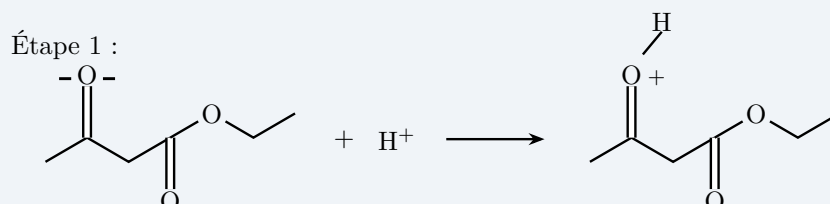
Q6. Calculer la valeur du rendement η_1 de cette synthèse.

3. Synthèse d'une coumarine en présence d'acide paratoluènesulfonique Dans un deuxième schéma de synthèse du composé A, le résorcinol réagit avec l'acétoacétate d'éthyle en présence d'un acide organique fort, l'acide paratoluènesulfonique (APTS). La transformation chimique est modélisée par l'équation de réaction représentée ci-dessous.



Q7. Recopier la formule topologique de l'acétoacétate d'éthyle, entourer les deux groupes caractéristiques sur la copie et nommer les familles fonctionnelles correspondantes.

Le début du mécanisme de la synthèse est proposé figure 4.



Étape 2 :

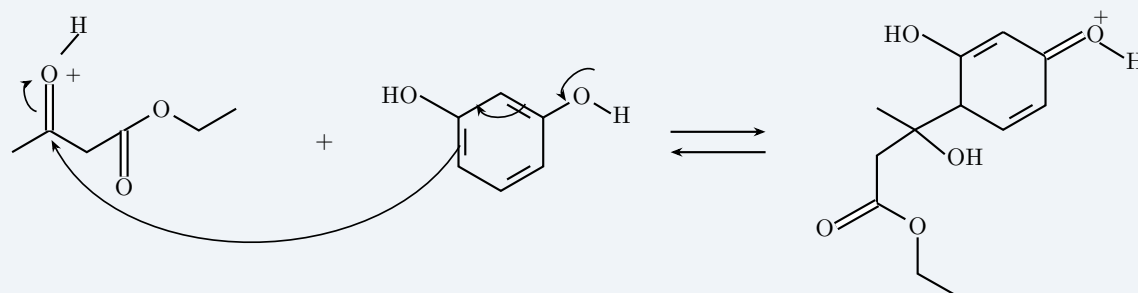


Figure 4. Les deux premières étapes du mécanisme de la synthèse

Q8. Recopier l'étape 1 du mécanisme sur la copie et y placer la flèche courbe expliquant le mécanisme.

Q9. Identifier la catégorie de réaction de l'étape 2 représentée figure 4 parmi les suivantes : addition, élimination ou substitution.

L'APTS joue le rôle de catalyseur dans la synthèse du composé A.

Q10. Donner la définition d'un catalyseur.

Le mode opératoire, décrit ci-après, utilisé pour cette synthèse, a été mis au point par deux chercheurs japonais :

- préparer un bain-marie d'eau tiède dans un cristalliseur, dont la température doit être au voisinage de 60–70 °C ;
- dans un erlenmeyer de 50 mL, introduire un barreau aimanté puis les masses $m_r = 2,20$ g de résorcinol, $m_{AE} = 2,60$ g d'acétoacétate d'éthyle et $m_{APTS} = 0,18$ g d'APTS ;
- placer l'erlenmeyer dans le bain-marie et maintenir, sous agitation magnétique, une température voisine de 60 °C pendant une durée de 10 minutes. Le milieu devient un liquide homogène ;
- refroidir avec un cristalliseur rempli d'eau glacée. Laisser refroidir à l'air libre l'erlenmeyer contenant le mélange réactionnel ;
- sous agitation magnétique, y ajouter progressivement 15 mL d'eau distillée. On observe qu'un solide cristallise. Refroidir pour achever la cristallisation et obtenir des cristaux bruts.

Pour récupérer des cristaux purifiés du composé A formés lors de la synthèse, on procède de la manière suivante :

- sous pression réduite, collecter le solide dans un entonnoir Büchner garni d'un filtre rond ;
- rincer le solide à l'aide de 3×5 mL d'eau froide. Recueillir les cristaux bruts dans une boîte de Pétri préalablement tarée ;
- recristalliser le produit dans un mélange éthanol-eau. Une très faible quantité de solvant doit être utilisée ;
- collecter les cristaux purifiés. Les recueillir sur un verre de montre taré.

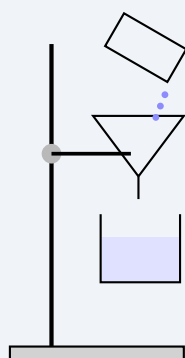
Données : tableau des solubilités des espèces en fonction du solvant.

	Résorcinol	Acétoacétate d'éthyle	APTS	Composé A
Eau	Insoluble	Insoluble	Soluble	Insoluble
Éthanol	Soluble	Soluble	Soluble	Peu soluble à froid Soluble à chaud

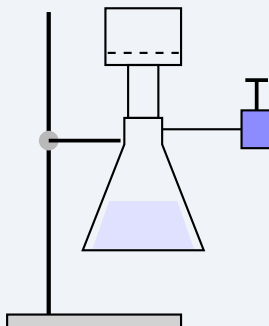
Q11. Indiquer le rôle de l'eau dans la cristallisation du produit brut obtenu qu'on recueille dans la boîte de Pétri.

Suite à la recristallisation, on observe une perte de masse du solide récupéré.

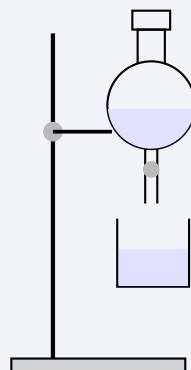
Q12. En supposant que la transformation n'est pas totale, indiquer les espèces éliminées du solide après recristallisation dans le mélange éthanol-eau.



Montage A



Montage B



Montage C

Figure 5. Montages proposés pour la filtration des cristaux obtenus

Q13. Indiquer, parmi les montages A, B et C proposés figure 5, celui utilisant une pression réduite et un entonnoir de Büchner.

Données : masses molaires des différentes espèces chimiques : acétoacétate d'éthyle $M_{AE} = 130 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, résorcinol $M_r = 110 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, composé A recristallisé $M_A = 176 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. On note n_{AE} la quantité de matière en acétoacétate d'éthyle et n_r la quantité de matière en résorcinol.

Q14. À l'aide des données du protocole, vérifier que les réactifs ont été introduits en proportions stoechiométriques.

On recueille une masse de produit $m_A = 2,0 \text{ g}$ de composé A purifié.

Q15. Calculer la valeur du rendement η_2 de cette synthèse.

Q16. Discuter d'un avantage et d'un inconvénient de chaque voie de synthèse.

Corrigé

1. Étude de l'acide sulfamique **Q1.** Un acide fort réagit *totalement* avec l'eau : $\text{AH} + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{A}^- + \text{H}_3\text{O}^+$ (flèche simple). Toutes les molécules AH apportées sont donc converties, et chacune libère un ion oxonium : $[\text{H}_3\text{O}^+] = C$ (on néglige les ions oxonium provenant de l'autoprotolyse de l'eau, ce qui est légitime tant que $C \gg 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$). Par définition du pH :

$$\text{pH} = -\log \left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^\circ} \right) = -\log \left(\frac{C}{c^\circ} \right).$$

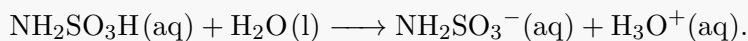
Q2. La dilution conserve la quantité de matière de soluté prélevée : $C V' = C_1 V_1$, d'où

$$V' = \frac{C_1 V_1}{C} = \frac{1,0 \times 10^{-2} \times 100,0}{1,0 \times 10^{-1}} = 10,0 \text{ mL}.$$

Le facteur de dilution vaut 10, cohérent avec $C/C_1 = 10$. *Protocole :* prélever 10,0 mL de la solution S à la **pipette jaugée** de 10,0 mL munie d'une propipette ; les verser dans une **fiolle jaugée** de 100,0 mL ; ajouter de l'eau distillée jusqu'aux deux tiers, boucher et agiter ; compléter jusqu'au trait de jauge en ajustant goutte à goutte à la pissette, le bas du ménisque tangent au trait ; boucher et homogénéiser en retournant plusieurs fois. Port des lunettes et des gants.

Ce que le correcteur attend : de la verrerie *jaugée* (et non graduée), seule compatible avec les trois chiffres significatifs de V_1 .

Q3. L'acide sulfamique étant un acide fort, sa réaction avec l'eau est totale et s'écrit avec une flèche simple :



Q4. Lecture de la figure 2 : S_1 (2 ; 2,2), S_2 (3 ; 3,1), S_3 (4 ; 4,1), S_4 (5 ; 5,3), à $\pm 0,1$ unité de pH près. Les quatre points sont alignés ; le coefficient directeur de la droite qui les porte vaut, entre les deux points extrêmes,

$$a = \frac{5,3 - 2,2}{5 - 2} = \frac{3,1}{3} = 1,03 \approx 1,$$

et son ordonnée à l'origine $b = 2,2 - 1,03 \times 2 = 0,1 \approx 0$. La relation expérimentale est donc $\text{pH} = -\log\left(\frac{C_n}{c^\circ}\right)$: c'est exactement la loi établie en Q1 pour un acide fort. L'acide sulfamique peut donc être considéré comme un **acide fort**. (Un acide faible donnerait des points au-dessus de cette droite, d'autant plus que la solution est concentrée, et une pente voisine de 0,5.)

2. Synthèse en présence d'acide sulfamique **Q5.** La 7-hydroxy-4-méthylcoumarine possède un groupe hydroxyle porté par le cycle aromatique, un groupe carbonyle de lactone (ester cyclique) et les liaisons C–O correspondantes ; elle ne contient ni azote ni groupe acide carboxylique. Le spectre de la figure 3 présente :

- une bande forte et large dont le minimum se situe vers 3500 cm^{-1} ($T \approx 0,26$) : c'est la liaison O–H (domaine $3500\text{--}3700 \text{ cm}^{-1}$) du groupe hydroxyle en position 7 ; sa largeur s'explique par les liaisons hydrogène entre molécules à l'état solide ;
- une bande très intense vers 1670 cm^{-1} , où la transmittance s'effondre au bas du graphe ($T < 0,2$) : c'est la liaison C=O (domaine $1650\text{--}1740 \text{ cm}^{-1}$) du carbonyle de la lactone ;
- des bandes fortes à moyennes vers 1275 cm^{-1} ($T \approx 0,25$) et 1070 cm^{-1} ($T \approx 0,50$) : ce sont les liaisons C–O (domaine $1040\text{--}1300 \text{ cm}^{-1}$), celles de l'ester cyclique et du phénol ;
- aucune bande large et intense étalée sur $2500\text{--}3200 \text{ cm}^{-1}$: dans cette zone la transmittance ne descend jamais au-dessous de 0,44 et remonte régulièrement jusqu'à 0,80. Le produit n'est donc pas un acide carboxylique, ce qui confirme la présence de la fonction ester et non d'un acide.

Toutes les bandes attendues pour le composé A sont présentes, et aucune bande n'exige un groupe absent de la structure : le spectre est **compatible** avec la 7-hydroxy-4-méthylcoumarine. *Remarque* : la bande observée vers 1610 cm^{-1} tombe dans l'intervalle donné pour N–H, mais c'est aussi le domaine des liaisons C=C d'un cycle aromatique, absentes de la table. Comme la molécule ne contient pas d'azote, c'est cette dernière attribution qu'il faut retenir.

Q6. On détermine d'abord les quantités de matière introduites. Pour le résorcinol, la densité $d = 1,08$ donne la masse volumique $\rho = d \times \rho_{\text{eau}} = 1,08 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$, donc

$$m_R = \rho V_R = 1,08 \times 11,1 = 12,0 \text{ g}, \quad n_r = \frac{m_R}{M_r} = \frac{12,0}{110} = 1,09 \times 10^{-1} \text{ mol}.$$

Pour l'acétylacétate d'éthyle : $n_{AE} = \frac{14,2}{130} = 1,09 \times 10^{-1} \text{ mol}$. (Le sujet écrit « acétylacétate d'éthyle » dans cette partie et « acétoacétate d'éthyle » dans la suivante : c'est le *même* composé, de formule $\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}_3$ et de masse molaire $130 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; le nom correct est **acétoacétate d'éthyle** (3-oxobutanoate d'éthyle).)

Les nombres stoechiométriques valant 1 pour les deux réactifs, ils sont introduits en proportions stoechiométriques : la quantité maximale de composé A formée est $n_{\text{th}} = 1,09 \times 10^{-1} \text{ mol}$. La

quantité réellement obtenue vaut

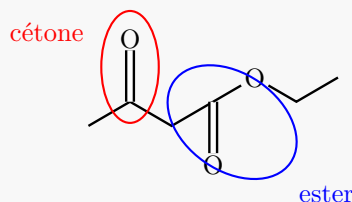
$$n_{\text{exp}} = \frac{m}{M_A} = \frac{12,4}{176} = 7,05 \times 10^{-2} \text{ mol},$$

d'où le rendement

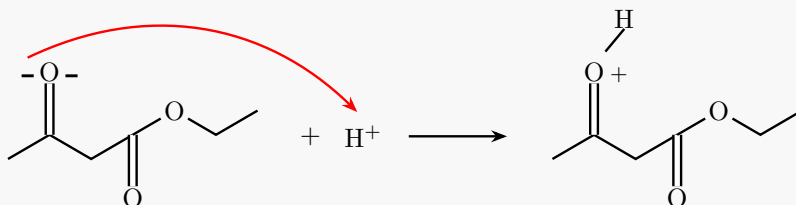
$$\eta_1 = \frac{n_{\text{exp}}}{n_{\text{th}}} = \frac{7,05 \times 10^{-2}}{1,09 \times 10^{-1}} = 0,65, \quad \text{soit } 65 \, \%.$$

Ce que le correcteur attend : la conversion volume $\rightarrow$ masse par la densité, et un rendement calculé sur des *quantités de matière* (le rapport brut des masses, 12,4/12,0, n'a aucun sens ici puisque les masses molaires diffèrent).

3. Synthèse en présence d'APTS Q7. L'acétoacétate d'éthyle porte deux groupes caractéristiques : un groupe **carbonyle** C=O dont le carbone est lié à deux atomes de carbone, caractéristique de la famille des **cétones** ; et un groupe –CO–O–, caractéristique de la famille des **esters**.



Q8. L'ion H^+ est une lacune électronique : c'est un *site accepteur* de doublet. L'atome d'oxygène de la cétone, qui porte des doublets non liants et la charge partielle δ^- de la liaison polarisée C=O, est un *site donneur*. La flèche courbe part donc d'un **doublet non liant de l'oxygène de la cétone** et pointe vers H^+ : c'est la nouvelle liaison O–H qui se forme, et l'oxygène, devenu trivalent, porte alors une charge +.



Ce que le correcteur attend : une flèche qui part d'un *doublet* (non liant) et non de l'atome lui-même, et qui va *vers* le proton, et non l'inverse.

Q9. À l'étape 2, deux entités (l'acétoacétate d'éthyle protoné et le résorcinol) s'unissent pour n'en former qu'une seule, par *ouverture d'une liaison multiple* : la double liaison C=O du carbonyle protoné s'ouvre, le carbone qui la portait devient tétragonal et porte désormais un groupe –OH, tandis qu'une nouvelle liaison C–C est créée avec le cycle du résorcinol. Aucun atome ni groupe d'atomes n'est remplacé (ce ne peut être une substitution) ni éliminé (ce ne peut être une élimination) : il s'agit d'une réaction d'**addition** (l'addition nucléophile du cycle riche en électrons sur le carbonyle rendu plus électrophile par la protonation de l'étape 1).

Q10. Un **catalyseur** est une espèce chimique qui augmente la vitesse d'une transformation sans figurer dans l'équation de la réaction : il est consommé au cours d'une étape du mécanisme puis régénéré au cours d'une autre, de sorte qu'on le retrouve intact à la fin. Il agit en ouvrant un chemin réactionnel différent, plus rapide. Il ne modifie ni l'état final du système, ni le rendement maximal accessible : il permet seulement de l'atteindre plus vite, ou à plus basse température.

Q11. D'après le tableau de solubilités, le composé A est **insoluble dans l'eau** alors qu'il est soluble (à chaud) dans le milieu réactionnel organique. En ajoutant progressivement 15 mL d'eau distillée, on abaisse fortement la solubilité du composé A dans le mélange : la solution devient sursaturée et le produit **cristallise**. L'eau joue donc le rôle de « non-solvant » du produit, et de solvant des impuretés : l'APTS, soluble dans l'eau, reste en solution. Le refroidissement, qui diminue encore la solubilité, achève la cristallisation.

Q12. Le solvant de recristallisation est un mélange éthanol-eau : on y dissout le solide à chaud, puis on laisse refroidir pour que seul le composé A recristallise (« peu soluble à froid »), les impuretés restant dissoutes dans les eaux mères. Sont donc éliminées :

- les **réactifs n'ayant pas réagi** — la transformation n'étant pas totale, il reste du **résorcinol** et de l'**acétoacétate d'éthyle**, tous deux solubles dans l'éthanol ;
- l'**APTS** résiduel, soluble dans l'eau comme dans l'éthanol.

S'y ajoute inévitablement une fraction du composé A lui-même, qui reste dissoute dans les eaux mères (il est « peu soluble à froid », mais pas insoluble) : c'est la raison principale de la perte de masse observée, et c'est pourquoi le protocole précise d'utiliser une *très faible quantité* de solvant.

Q13. C'est le **montage B** : on y reconnaît l'entonnoir Büchner (entonnoir cylindrique à fond plat percé, garni d'un filtre rond) posé sur une fiole à vide, dont la tubulure latérale est reliée par un tuyau à une trompe à eau branchée sur le robinet, qui crée la dépression. Le montage A est une filtration par gravité sur entonnoir conique, plus lente ; le montage C est une ampoule à décanter, destinée à une extraction liquide-liquide, pas à une filtration.

Q14. Avec les masses du protocole :

$$n_r = \frac{m_r}{M_r} = \frac{2,20}{110} = 2,00 \times 10^{-2} \text{ mol}, \quad n_{AE} = \frac{m_{AE}}{M_{AE}} = \frac{2,60}{130} = 2,00 \times 10^{-2} \text{ mol}.$$

L'équation de la réaction fait intervenir les deux réactifs avec le même nombre stœchiométrique (1) : la condition de proportions stœchiométriques s'écrit $\frac{n_r}{1} = \frac{n_{AE}}{1}$. Les deux quantités étant égales à $2,00 \times 10^{-2}$ mol, les réactifs ont bien été introduits en **proportions stœchiométriques** : aucun des deux n'est en excès, ils seront tous deux totalement consommés si la transformation est totale.

Q15. En proportions stœchiométriques, l'avancement maximal vaut $x_{\max} = 2,00 \times 10^{-2}$ mol et la quantité maximale de composé A est $n_{\text{th}} = 2,00 \times 10^{-2}$ mol. La quantité obtenue vaut

$$n_{\text{exp}} = \frac{m_A}{M_A} = \frac{2,0}{176} = 1,14 \times 10^{-2} \text{ mol} \approx 1,1 \times 10^{-2} \text{ mol},$$

d'où

$$\eta_2 = \frac{n_{\text{exp}}}{n_{\text{th}}} = \frac{1,14 \times 10^{-2}}{2,00 \times 10^{-2}} = 0,57, \quad \text{soit } 57 \ \%.$$

(Deux chiffres significatifs au résultat, comme la donnée $m_A = 2,0$ g ; le quotient se calcule sur la valeur *non arrondie* $2,0/176$, sans quoi on trouverait 0,55.)

Q16. Voie 1 (acide sulfamique). Avantages : le rendement est meilleur ($\eta_1 = 65$ % contre 57 %) et la synthèse se fait sans solvant, en 20 minutes seulement. **Inconvénient :** elle exige une température de 130 °C, donc un chauffage spécifique, une dépense d'énergie importante et des précautions de sécurité accrues ; elle est irréalisable dans un bain-marie de laboratoire de lycée.

Voie 2 (APTS). Avantages : la température est douce (60 °C, simple bain-marie), la durée encore plus courte (10 minutes), la dépense d'énergie et les risques sont moindres, et le catalyseur est employé en très faible quantité (0,18 g pour 2,20 g de résorcinol) puisqu'il est régénéré ; le matériel est ordinaire. **Inconvénients :** le rendement est plus faible (57 %), et les étapes de

purification supplémentaires (filtration sur Büchner, rinçages, recristallisation) consomment des solvants, produisent des déchets et entraînent des pertes de matière.

Les deux voies partagent enfin le même défaut du point de vue de la chimie verte : l'équation produit de l'éthanol et de l'eau en plus du composé A, de sorte que l'économie d'atomes est inférieure à 100 %.

Exercice 2

Sujet — La scintigraphie cardiaque — 5 points

La scintigraphie cardiaque est un examen indolore, réalisé par le cardiologue ou le médecin nucléaire pour évaluer la santé cardiaque d'un patient. L'examen dure environ 15 à 30 minutes et consiste en l'injection intraveineuse de thallium 201 radioactif. Le thallium 201 émet des rayons γ captés par une caméra à scintillation.

L'objectif de cet exercice est d'analyser les propriétés du thallium 201 utilisé pour analyser le fonctionnement cardiaque, ainsi que son comportement dans l'organisme lors de son injection et de son élimination au cours d'une scintigraphie du cœur.

Le thallium 201 ($^{201}_{81}\text{Tl}$), utilisé pour la scintigraphie, peut se désintégrer en mercure 201 selon l'équation :



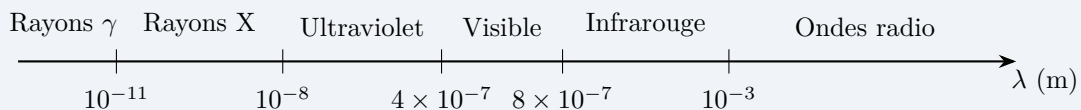
où $^{201}_{80}\text{Hg}^*$ représente un état excité du $^{201}_{80}\text{Hg}$.

Q1. Préciser à quel type de désintégration correspond cette transformation nucléaire.

Le $^{201}_{80}\text{Hg}^*$ se désexcite très rapidement en émettant un photon γ d'énergie E égale à 135 keV.

Données :

- célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$;
- électronvolt : $1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$;
- relation entre l'énergie et la longueur d'onde dans le vide λ_v : $E = \frac{hc}{\lambda_v}$;
- domaines spectraux des ondes électromagnétiques :



Q2. À l'aide des données, exprimer puis calculer la longueur d'onde λ_v de ce rayonnement d'énergie E dans le vide.

Q3. Retrouver alors le domaine du spectre auquel appartient ce rayonnement lors de la désintégration du thallium 201.

Q4. Citer une méthode de protection contre ces rayonnements ionisants.

Données et rappels :

- l'activité d'un échantillon de noyaux radioactifs est le nombre de désintégrations radioactives par unité de temps dans cet échantillon ;
- l'activité $A(t)$ à l'instant t est ici liée au nombre de noyaux $N(t)$ restant à l'instant t par la relation $A(t) = \lambda N(t)$, dans laquelle λ est la constante radioactive de la désintégration ;
- la loi de décroissance radioactive relative à l'activité est $A(t) = A_0 e^{-\lambda \cdot t}$;

- demi-vie (ou période) du thallium 201 : $t_{1/2} = 3,04$ jours ;
- 1 jour = 86 400 s.

Lors d'une scintigraphie du cœur, on injecte une solution stérile de chlorure de thallium 201. L'examen du patient considéré nécessite l'injection par voie intraveineuse d'une dose présentant une activité $A_0 = 78$ MBq.

Après l'administration du chlorure de thallium, il est conseillé de boire beaucoup d'eau pour éliminer le thallium restant par voie urinaire.

Q5. Donner la relation entre l'activité $A(t)$ d'un échantillon et la dérivée temporelle du nombre de noyaux radioactifs $N(t)$, notée $\frac{dN(t)}{dt}$, dans cet échantillon.

Q6. Établir l'équation différentielle régissant la population de noyaux radioactifs $N(t)$ sous la forme $\frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0$.

Q7. Vérifier que $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ est solution de l'équation différentielle précédente, avec N_0 le nombre de noyaux radioactifs initialement présents dans l'échantillon.

Q8. Établir l'expression de la constante radioactive en fonction du temps de demi-vie $t_{1/2}$. En déduire que la valeur de la constante radioactive λ du thallium 201 est $2,64 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$.

Q9. Calculer l'activité restante A_r chez le patient deux heures après l'injection. Conclure.

Q10. Calculer la durée $t_{1\%}$, en jours, au bout de laquelle l'activité radioactive du thallium 201 est égale à 1 % de sa valeur initiale A_0 . Justifier alors le fait qu'il est nécessaire de boire beaucoup d'eau après l'examen.

Corrigé

Q1. On vérifie les deux lois de conservation de Soddy sur l'équation proposée : conservation du nombre de nucléons, $201 = 201 + 0$; conservation de la charge, $81 = 80 + 1$. La particule émise, ${}^0_1\text{e}$, porte une charge $+e$ et une masse négligeable : c'est un **positon**. Il s'agit donc d'une désintégration β^+ , au cours de laquelle un proton du noyau se transforme en neutron. C'est cohérent avec la position du thallium 201 en dessous de la vallée de stabilité (excès de protons) : le numéro atomique diminue d'une unité (Z passe de 81 à 80) tandis que le nombre de nucléons reste inchangé. Le noyau fils étant formé dans un état excité, il se désexcite ensuite par émission d'un photon γ : c'est ce rayonnement, très pénétrant, qui sort de l'organisme et que la caméra détecte.

Q2. La relation donnée $E = \frac{hc}{\lambda_v}$ s'inverse en

$$\lambda_v = \frac{hc}{E}.$$

Il faut d'abord convertir l'énergie du photon en joules :

$$E = 135 \text{ keV} = 135 \times 10^3 \times 1,60 \times 10^{-19} = 2,16 \times 10^{-14} \text{ J}.$$

D'où

$$\lambda_v = \frac{6,63 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^8}{2,16 \times 10^{-14}} = \frac{1,989 \times 10^{-25}}{2,16 \times 10^{-14}} = 9,21 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

Ce que le correcteur attend : le passage des keV aux joules (facteur 10^3 puis facteur $1,60 \times 10^{-19}$) ; oublier le préfixe « kilo » donne une longueur d'onde mille fois trop grande, dans le domaine des rayons X.

Q3. La valeur obtenue, $\lambda_v = 9,21 \times 10^{-12} \text{ m}$, est inférieure à 10^{-11} m , borne qui sépare sur l'échelle donnée les rayons X des rayons γ . Ce rayonnement appartient donc au **domaine des rayons γ** , ce qui confirme l'information de l'énoncé : la désexcitation du mercure 201 produit

bien un photon γ . Ces photons de très courte longueur d'onde, donc de très grande énergie, sont ionisants et très pénétrants : ils traversent les tissus et peuvent être captés à l'extérieur du corps par la caméra à scintillation.

Q4. Trois leviers de radioprotection sont au programme, et il suffit d'en citer un :

- **l'écran** : s'interposer entre la source et la personne. Pour un rayonnement γ , très pénétrant, il faut une forte épaisseur de matériau dense : tablier ou paravent plombé, murs de plomb ou de béton (une feuille de papier suffirait pour α , quelques millimètres d'aluminium pour β) ;
- **la distance** : l'intensité reçue décroît comme $1/d^2$, doubler la distance divise la dose par quatre ;
- **la durée d'exposition** : limiter le temps passé auprès de la source, et suivre la dose reçue par dosimétrie individuelle pour le personnel soignant.

Q5. L'activité est le nombre de désintégrations par unité de temps. Or, pendant la durée dt , le nombre de noyaux radioactifs *diminue* de $|dN|$: la variation dN est négative. Pour que l'activité soit une grandeur positive, on pose donc

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt}.$$

Q6. On dispose de deux expressions de la même grandeur $A(t)$: celle de la question précédente et la relation rappelée dans l'énoncé, $A(t) = \lambda N(t)$. En les égalant :

$$-\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) \iff \frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, sans second membre : la même que celle d'une cinétique d'ordre 1 ou de la décharge d'un condensateur.

Q7. On dérive la fonction proposée par rapport au temps (N_0 et λ sont des constantes) :

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (N_0 e^{-\lambda t}) = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N(t).$$

En reportant dans l'équation différentielle :

$$\frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = -\lambda N(t) + \lambda N(t) = 0,$$

l'équation est donc vérifiée quel que soit t . De plus, à $t = 0$, $e^0 = 1$ et $N(0) = N_0$: la condition initiale est satisfaite. La fonction proposée est bien la solution du problème.

Q8. Par définition du temps de demi-vie, au bout de la durée $t_{1/2}$ la moitié des noyaux initiaux s'est désintégrée : $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$. En reportant dans la solution :

$$N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \implies e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \implies -\lambda t_{1/2} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2,$$

d'où

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}}.$$

Application numérique, avec $t_{1/2} = 3,04$ jours $= 3,04 \times 86\,400 = 2,63 \times 10^5$ s :

$$\lambda = \frac{0,693}{2,63 \times 10^5} = 2,64 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1},$$

ce qui est bien la valeur annoncée. *Ce que le correcteur attend* : la conversion des jours en secondes *avant* le calcul, puisque λ est demandée en s^{-1} .

Q9. Deux heures après l'injection, $t = 2 \times 3600 = 7,20 \times 10^3$ s. La loi de décroissance de l'activité donne

$$A_r = A_0 e^{-\lambda t} = 78 \times e^{-2,64 \times 10^{-6} \times 7,20 \times 10^3} = 78 \times e^{-1,90 \times 10^{-2}} = 78 \times 0,981 = 77 \text{ MBq.}$$

Conclusion : en deux heures, l'activité n'a diminué que de 2 % environ. La décroissance radioactive est donc négligeable à l'échelle de l'examen (15 à 30 minutes) : c'est un avantage, puisque l'activité reste pratiquement constante pendant toute l'acquisition des images, ce qui garantit un signal stable pour la caméra. Mais c'est aussi un inconvénient : le patient reste radioactif bien après la fin de l'examen.

Q10. On cherche la date $t_{1\%}$ telle que $A(t_{1\%}) = 0,01 A_0$:

$$A_0 e^{-\lambda t_{1\%}} = 0,01 A_0 \implies e^{-\lambda t_{1\%}} = 0,01 \implies t_{1\%} = -\frac{\ln(0,01)}{\lambda} = \frac{\ln 100}{\lambda}.$$

Application numérique :

$$t_{1\%} = \frac{4,61}{2,64 \times 10^{-6}} = 1,74 \times 10^6 \text{ s} = \frac{1,74 \times 10^6}{86\,400} = 20,2 \text{ jours.}$$

On peut vérifier autrement : $t_{1\%} = \frac{\ln 100}{\ln 2} t_{1/2} = 6,64 \times 3,04 = 20,2$ jours, soit un peu moins de sept demi-vies ($2^7 = 128 > 100$).

Justification : si l'on comptait sur la seule décroissance radioactive, il faudrait **une vingtaine de jours** pour que l'activité du thallium tombe à 1 % de sa valeur initiale : le patient resterait une source de rayonnement γ pendant des semaines, pour lui-même comme pour son entourage. En buvant beaucoup d'eau, il accélère l'élimination *biologique* du thallium par voie urinaire : cette élimination physiologique s'ajoute à la décroissance physique, et la durée au bout de laquelle il ne reste que 1 % de l'activité dans l'organisme devient très inférieure à 20 jours. La dose totale reçue par les organes, et notamment par les reins et la vessie, en est fortement réduite.

Exercice 3

Sujet — La saga de la découverte des trous noirs — 6 points

L'astronome Reinhard Genzel, prix Nobel de physique en 2020, et ses collaborateurs ont apporté les preuves de l'existence d'un trou noir au centre de notre galaxie, nommé SgrA* (Sagittarius A*), dont la masse a été évaluée peu après par l'équipe d'Andrea Ghez à environ 4,4 millions de masses solaires. (*D'après Sciences et Avenir — octobre 2020*)

Le but de cet exercice est d'estimer la masse M du trou noir SgrA* afin de confirmer la valeur donnée dans l'article précédent.

La figure 1 présente la trajectoire elliptique d'une étoile appelée S2 dans le référentiel galiléen dont l'origine est le trou noir SgrA*. On a reporté, à côté de chaque position de l'étoile S2, la date à laquelle a été effectué le relevé. Ainsi, 2000,6 correspond à l'année 2000, accomplie au 6/10 de sa durée. Les points F_1 et F_2 sont les foyers de l'ellipse, F_1 étant occupé par SgrA*.

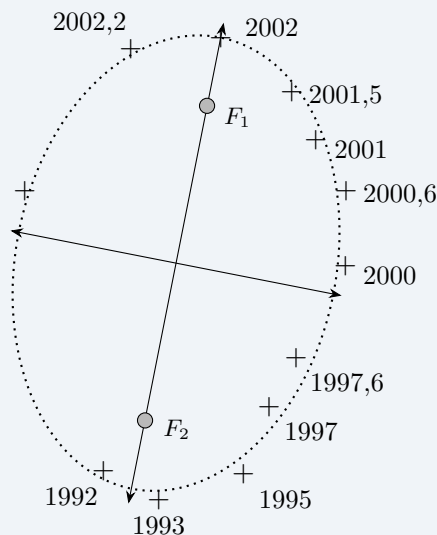


Figure 1. Relevé des positions de l'étoile S2

D'après la deuxième loi de Kepler, le rayon vecteur qui relie le centre du trou noir SgrA* à l'étoile S2 balaie des aires égales pendant des durées égales.

Q1. Expliquer que la vitesse de l'étoile S2 en 2002 est supérieure à la vitesse de S2 en 1993.

Q2. À partir de la figure 1, montrer que la valeur de la période de révolution T de l'étoile S2 autour de SgrA* est de l'ordre de 19 ans.

On peut montrer que la période de révolution de l'étoile S2 est identique à celle qu'aurait une étoile fictive Sf dont la trajectoire serait circulaire autour de F_1 , avec un rayon égal à la moitié du grand axe de l'ellipse parcourue par S2.

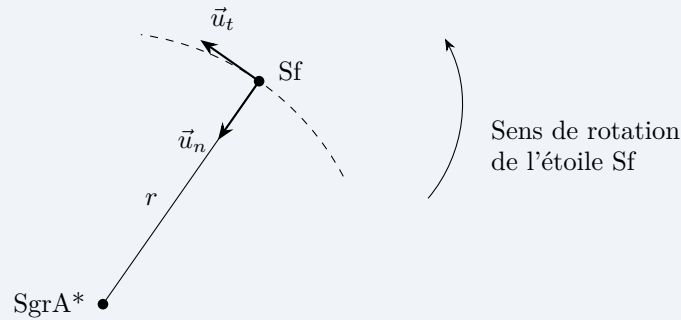


Figure 2. Portion de trajectoire circulaire de l'étoile Sf autour de SgrA*

On considère que l'étoile fictive Sf est uniquement soumise à la force gravitationnelle de SgrA* et que sa trajectoire est circulaire de rayon r . L'étude est effectuée dans le repère de Frenet ($Sf, \vec{u}_t, \vec{u}_n$). On note m_f la masse de l'étoile fictive Sf.

Q3. À l'aide de la deuxième loi de Newton appliquée à l'étoile Sf considérée comme ponctuelle, exprimer son vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction de G , M , r et du vecteur $\vec{u}_n$.

Q4. Recopier la figure 2 sur votre copie, sans souci d'échelle, et représenter, au point Sf, les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ de l'étoile Sf.

Q5. En utilisant l'expression du vecteur accélération dans la base de Frenet, montrer alors que, dans le cadre de l'approximation d'une trajectoire circulaire, le mouvement de l'étoile Sf est circulaire uniforme.

Q6. Montrer également que l'expression de la vitesse v de l'étoile Sf est $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$.

Q7. On définit T comme la période de révolution de l'étoile S autour du trou noir SgrA*. Retrouver l'expression de la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Données :

- constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$;
- masse du Soleil : $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$;
- la valeur r du rayon de l'orbite de l'étoile fictive Sf : $r = 1,74 \times 10^{11} \text{ km}$;
- la valeur de la période de révolution T de l'étoile S2 autour de SgrA* est égale à 19 ans.

Q8. Déterminer la valeur de la masse M du trou noir SgrA*. Comparer le résultat à la valeur annoncée dans l'article de Sciences et Avenir cité en préambule. Commenter.

Corrigé

Q1. Le trou noir SgrA* occupe le foyer F_1 , celui qui est proche de la position 2002. Or, sur une ellipse, la distance au foyer varie : en 2002 l'étoile est au voisinage du **périastre** (l'extrémité du grand axe la plus proche de F_1), donc le rayon vecteur F_1S2 est *court* ; en 1993 elle est au voisinage de l'**apoastre** (l'autre extrémité du grand axe), donc le rayon vecteur est *long*.

D'après la deuxième loi de Kepler (loi des aires), le rayon vecteur balaie des aires égales pendant des durées égales. Pendant une même durée Δt , l'aire balayée s'apparente à celle d'un triangle de « base » l'arc parcouru et de « hauteur » la longueur du rayon vecteur. Pour que cette aire soit la même, l'arc parcouru doit être d'autant *plus long* que le rayon vecteur est *plus court*. L'étoile parcourt donc une plus grande distance par unité de temps près du périastre : sa vitesse y est plus grande. D'où $v(2002) > v(1993)$.

La figure le confirme directement : entre 1992 et 1993, c'est-à-dire en un an, l'étoile parcourt un arc très court, alors qu'entre 2001,5 et 2002, en une demi-année seulement, elle parcourt un arc nettement plus long.

Q2. Le grand axe de l'ellipse est matérialisé sur la figure 1 par la double flèche qui passe par les deux foyers F_1 et F_2 . Ses deux extrémités sont le périastre et l'apoastre. La lecture de la figure montre que :

- l'étoile occupe le **périastre en 2002** (la position 2002 est exactement à l'extrémité du grand axe située du côté de F_1) ;
- elle occupe l'**apoastre entre 1992 et 1993** (l'autre extrémité du grand axe tombe entre ces deux relevés, soit vers 1992,5).

Or la trajectoire est symétrique par rapport au grand axe : aller de l'apoastre au périastre, c'est parcourir exactement la **moitié** de l'ellipse, donc effectuer une demi-révolution. Par conséquent

$$\frac{T}{2} \approx 2002 - 1992,5 = 9,5 \text{ ans} \quad \Rightarrow \quad T \approx 19 \text{ ans.}$$

Incertitude de lecture : l'extrémité du grand axe se situe entre les relevés 1992 et 1993 ; si l'on lit 1993, on obtient $T \approx 18$ ans, si l'on lit 1992, $T \approx 20$ ans. La période est donc bien *de l'ordre de 19 ans*.

Q3. *Système* : l'étoile fictive Sf, de masse m_f , supposée ponctuelle. *Référentiel* : celui d'origine SgrA*, supposé galiléen. *Bilan des forces* : l'étoile n'est soumise qu'à la force gravitationnelle exercée par SgrA*, de valeur $F = G \frac{M m_f}{r^2}$ et dirigée de Sf vers SgrA*. Comme $\vec{u}_n$ est le vecteur unitaire normal orienté vers le centre de la trajectoire (figure 2) :

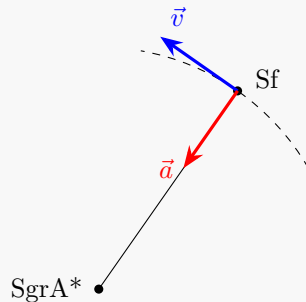
$$\vec{F} = G \frac{M m_f}{r^2} \vec{u}_n.$$

La deuxième loi de Newton s'écrit $\sum \vec{F} = m_f \vec{a}$, soit $G \frac{M m_f}{r^2} \vec{u}_n = m_f \vec{a}$, d'où, après simplification par m_f :

$$\vec{a} = \frac{G M}{r^2} \vec{u}_n.$$

L'accélération ne dépend pas de la masse de l'étoile : c'est pourquoi on pourra « peser » le trou noir sans connaître m_f .

Q4. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est toujours *tangent* à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement : il est donc porté par $\vec{u}_t$ (et de même sens que lui, puisque $\vec{u}_t$ est orienté dans le sens du mouvement indiqué sur la figure 2). Le vecteur accélération $\vec{a}$ est, d'après Q3, colinéaire à $\vec{u}_n$ et de même sens : il est porté par le rayon, dirigé de Sf vers SgrA* ; il est **centripète**. Les deux vecteurs sont orthogonaux.



Q5. Dans la base de Frenet, pour un mouvement circulaire de rayon r , le vecteur accélération s'écrit

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n.$$

Or on a établi en Q3 que $\vec{a} = \frac{GM}{r^2} \vec{u}_n$: l'accélération n'a *aucune* composante selon $\vec{u}_t$. Par identification des composantes dans cette base (qui est orthonormée), la composante tangentielle est nulle :

$$\frac{dv}{dt} = 0,$$

donc la valeur v de la vitesse est constante au cours du temps. La trajectoire étant circulaire et la valeur de la vitesse constante, le mouvement de Sf est bien **circulaire uniforme**.

Q6. L'identification des composantes selon $\vec{u}_n$ donne

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \implies v^2 = \frac{GM}{r} \implies v = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

la racine positive étant seule retenue car v est une valeur de vitesse. On vérifie l'homogénéité : GM/r s'exprime en $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{kg} \times \text{m}^{-1} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, dont la racine est bien en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q7. Le mouvement étant uniforme, l'étoile parcourt le périmètre $2\pi r$ de son orbite pendant une période T :

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

En égalant avec l'expression de Q6 et en élevant au carré :

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \implies 4\pi^2 r^3 = GM T^2 \implies \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

C'est bien la troisième loi de Kepler : le rapport T^2/r^3 ne dépend que de la masse de l'astre central.

Q8. On isole M dans la relation précédente :

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}.$$

L'expression est bien homogène à une masse : $\frac{\text{m}^3}{\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{s}^2} = \text{kg}$.

Conversions préalables en unités du système international :

$$r = 1,74 \times 10^{11} \text{ km} = 1,74 \times 10^{14} \text{ m}, \quad T = 19 \text{ ans} = 19 \times 365,25 \times 24 \times 3600 = 6,00 \times 10^8 \text{ s}.$$

Application numérique :

$$M = \frac{4\pi^2 \times (1,74 \times 10^{14})^3}{6,67 \times 10^{-11} \times (6,00 \times 10^8)^2} = \frac{2,08 \times 10^{44}}{2,40 \times 10^7} = 8,7 \times 10^{36} \text{ kg}.$$

Exprimée en masses solaires :

$$\frac{M}{M_S} = \frac{8,7 \times 10^{36}}{1,99 \times 10^{30}} = 4,4 \times 10^6,$$

soit environ **4,4 millions de masses solaires**.

Comparaison et commentaire. La valeur obtenue coïncide avec celle annoncée dans l'article de *Sciences et Avenir* (4,4 millions de masses solaires). Le modèle utilisé est donc pertinent, alors même qu'il repose sur plusieurs approximations : la trajectoire réelle est elliptique et

non circulaire (on a remplacé l'ellipse par un cercle de rayon égal au demi-grand axe, ce que la troisième loi de Kepler autorise), la masse de l'étoile est négligée devant M , et SgrA* est supposé fixe. Le résultat est en revanche très sensible à la période, qui intervient au carré : lire $T = 18$ ans au lieu de 19 ferait remonter la masse de 11 %, ce qui reste le même ordre de grandeur.

Ce calcul est bien la « preuve » évoquée en préambule : une masse de plusieurs millions de masses solaires est concentrée à l'intérieur d'une orbite de rayon $1,74 \times 10^{14}$ m, soit environ $1,2 \times 10^3$ fois la distance Terre–Soleil — une région minuscule à l'échelle galactique. Aucun amas d'étoiles ordinaires ne peut être aussi compact et aussi sombre : seul un trou noir supermassif rend compte de l'observation.

Ce que le correcteur attend : les kilomètres convertis en mètres et les années en secondes avant toute application numérique (oublier l'une de ces conversions fausse le résultat de plusieurs ordres de grandeur), puis la division par M_S pour pouvoir comparer à l'article.