

Mathématiques

Baccalauréat général 2025 — épreuve de spécialité

Métropole, mardi 17 juin 2025 (25-MATJ1ME1)

Corrigé

Quatre exercices

Exercice 1

Sujet — Exercice 1 — 5 points

On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O.

Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.

Au sein de la population française, on sait que :

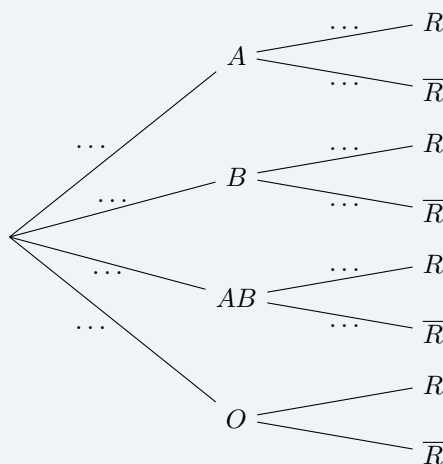
- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 % sont de rhésus positif ;
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif ;
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 % sont de rhésus positif.

On choisit au hasard une personne dans la population française.

On désigne par :

- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A » ;
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B » ;
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB » ;
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O » ;
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif ».

Pour un événement quelconque E , on note $\bar{E}$ l'évènement contraire de E et $P(E)$ la probabilité de E .



1. Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.
2. Montrer que $P(B \cap R) = 0,084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. On précise que $P(R) = 0,8397$. Montrer que $P_O(R) = 0,83$.
4. On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.

Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.

Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de 0,0714.

5. Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

5.a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

5.b. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.

5.c. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à 7,14 et que sa variance $V(X)$ est égale à 6,63 à 10^{-2} près.

6. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées $1, 2, 3, \dots, N$ où N est un entier naturel non nul.

On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, ..., X_N pour la ville N .

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à 7,14 et la même variance égale à 6,63.

On considère la variable aléatoire $M_N = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$.

6.a. Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?

6.b. Calculer l'espérance $E(M_N)$.

6.c. On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N . Montrer que $V(M_N) = \frac{6,63}{N}$.

6.d. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que :

$$P(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95.$$

Corrigé

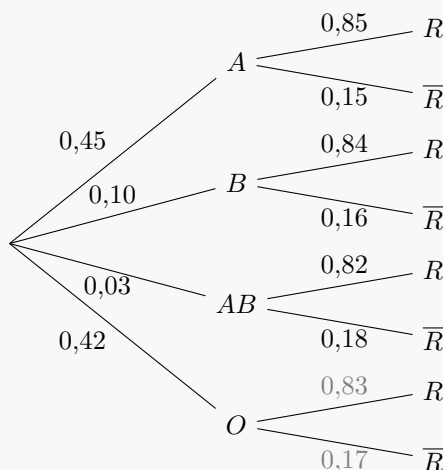
La personne est choisie au hasard dans la population : les proportions de l'énoncé sont donc des probabilités. Les pourcentages « parmi eux » sont des probabilités *conditionnelles* (sachant le groupe sanguin).

1. Les données se lisent directement :

- premier niveau (groupe sanguin) : $P(A) = 0,45$, $P(B) = 0,10$, $P(AB) = 0,03$; les quatre groupes formant une partition de la population, la somme des probabilités des branches issues de la racine vaut 1, d'où

$$P(O) = 1 - (0,45 + 0,10 + 0,03) = 1 - 0,58 = 0,42 ;$$

- second niveau (rhésus, sachant le groupe) : $P_A(R) = 0,85$ donc $P_A(\bar{R}) = 1 - 0,85 = 0,15$; $P_B(R) = 0,84$ donc $P_B(\bar{R}) = 0,16$; $P_{AB}(R) = 0,82$ donc $P_{AB}(\bar{R}) = 0,18$ (la somme des probabilités des deux branches issues d'un même nœud vaut 1).



Les dix pointillés sont ainsi complétés. Les deux branches issues de O (en gris) ne font pas partie des pointillés demandés : elles seront obtenues à la question 3.

2. La probabilité d'un chemin de l'arbre est le produit des probabilités de ses branches. Le chemin « B puis R » donne :

$$P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0,10 \times 0,84 = 0,084.$$

Interprétation : 8,4 % de la population française est de groupe sanguin B *et* de rhésus positif (groupe B+); autrement dit, la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit de groupe B+ est 0,084.

3. Les événements A , B , AB et O sont deux à deux incompatibles et leur réunion est l'univers : ils forment une partition de l'univers. D'après la *formule des probabilités totales* :

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R) + P(O \cap R).$$

Calculons les trois premières intersections avec la règle du produit :

$$P(A \cap R) = 0,45 \times 0,85 = 0,3825, \quad P(B \cap R) = 0,084, \quad P(AB \cap R) = 0,03 \times 0,82 = 0,0246.$$

Comme $P(R) = 0,8397$, on en déduit

$$P(O \cap R) = 0,8397 - (0,3825 + 0,084 + 0,0246) = 0,8397 - 0,4911 = 0,3486.$$

Enfin, par définition de la probabilité conditionnelle (on a bien $P(O) = 0,42 \neq 0$) :

$$P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)} = \frac{0,3486}{0,42} = 0,83.$$

On a bien $P_O(R) = 0,83$ (et donc $P_O(\bar{R}) = 1 - 0,83 = 0,17$, ce qui complète l'arbre).

Ce que le correcteur attend : la formule des probabilités totales écrite avec les *quatre* termes, car la donnée $P(R)$ n'a pas d'autre usage que de fournir le terme manquant $P(O \cap R)$; puis la division par $P(O)$, et non par $P(R)$.

4. Être donneur universel, c'est être de groupe O *et* de rhésus négatif : c'est l'événement $O \cap \bar{R}$. D'après la règle du produit et la question 3 :

$$P(O \cap \bar{R}) = P(O) \times P_O(\bar{R}) = 0,42 \times (1 - 0,83) = 0,42 \times 0,17 = 0,0714.$$

La probabilité qu'un individu choisi au hasard soit donneur universel est bien 0,0714, soit 7,14 % de la population.

5.a. On choisit 100 personnes et le choix est assimilé à un tirage *avec remise* : on répète donc 100 fois, de façon identique et indépendante, la même épreuve de Bernoulli « la personne choisie est-elle donneur universel ? », dont le succès a pour probabilité $p = 0,0714$ (question 4). C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès : elle suit la *loi binomiale* de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$, notée $\mathcal{B}(100; 0,0714)$.

5.b. On cherche $P(X \leq 7)$. D'après le cours, pour tout entier k de $\llbracket 0; 100 \rrbracket$,

$$P(X = k) = \binom{100}{k} \times 0,0714^k \times 0,9286^{100-k},$$

et $P(X \leq 7) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 7)$. Cette somme de huit termes s'obtient à la calculatrice (fonction de répartition de la loi binomiale) :

$$P(X \leq 7) \approx 0,5771, \quad \text{soit } P(X \leq 7) \approx 0,577 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

La probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans l'échantillon est environ 0,577. *Ce que le correcteur attend* : l'événement « au plus 7 » traduit par $X \leq 7$ (et non $X < 7$ ni $X \geq 7$), et l'arrondi demandé à 10^{-3} .

5.c. Pour une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, le cours donne $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$. Ici :

$$E(X) = 100 \times 0,0714 = 7,14$$

et

$$V(X) = 100 \times 0,0714 \times (1 - 0,0714) = 7,14 \times 0,9286 = 6,630\,204 \approx 6,63 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

On a bien $E(X) = 7,14$ et $V(X) \approx 6,63$: en moyenne, un échantillon de 100 personnes contient 7,14 donneurs universels.

6.a. $X_1 + X_2 + \dots + X_N$ est le nombre total de donneurs universels rencontrés dans les N échantillons de 100 personnes (un par ville). En divisant par N , la variable aléatoire M_N représente le *nombre moyen de donneurs universels par échantillon de 100 personnes*, calculé sur les N villes où a lieu la collecte.

6.b. Par linéarité de l'espérance (valable sans hypothèse d'indépendance), et puisque chaque X_i a pour espérance 7,14 :

$$\begin{aligned} E(M_N) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}\right) = \frac{1}{N}(E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_N)) \\ &= \frac{1}{N} \times N \times 7,14 = 7,14. \end{aligned}$$

6.c. Pour la variance, on utilise deux propriétés du cours : $V(aY) = a^2 V(Y)$ pour tout réel a , et l'additivité de la variance pour des variables *indépendantes*, ce que sont $X_1, \dots, X_N$ par hypothèse :

$$\begin{aligned} V(M_N) &= V\left(\frac{1}{N}(X_1 + \dots + X_N)\right) = \frac{1}{N^2} V(X_1 + \dots + X_N) \\ &= \frac{1}{N^2} (V(X_1) + \dots + V(X_N)) = \frac{1}{N^2} \times N \times 6,63 = \frac{6,63}{N}. \end{aligned}$$

On retrouve le résultat du cours sur la moyenne M_N d'un échantillon de taille N : même espérance que la loi commune, variance divisée par N .

Ce que le correcteur attend : le facteur $\frac{1}{N}$ sort de l'espérance tel quel mais sort de la variance *au carré*, et l'égalité $V(X_1 + \dots + X_N) = V(X_1) + \dots + V(X_N)$ doit être justifiée par l'indépendance.

6.d. Commençons par écrire l'événement sous la forme d'un écart à l'espérance $E(M_N) = 7,14$:

$$7 < M_N < 7,28 \iff -0,14 < M_N - 7,14 < 0,14 \iff |M_N - 7,14| < 0,14.$$

L'événement $\{7 < M_N < 7,28\}$ est donc le contraire de $\{|M_N - 7,14| \geq 0,14\}$. L'*inégalité de Bienaymé-Tchebychev*, appliquée à M_N (d'espérance 7,14 et de variance $\frac{6,63}{N}$) avec $\varepsilon = 0,14 > 0$, donne :

$$P(|M_N - 7,14| \geq 0,14) \leq \frac{V(M_N)}{0,14^2} = \frac{6,63}{0,0196 N}.$$

En passant à l'événement contraire :

$$P(7 < M_N < 7,28) = 1 - P(|M_N - 7,14| \geq 0,14) \geq 1 - \frac{6,63}{0,0196 N}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet donc d'affirmer que $P(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95$ dès que le minorant dépasse 0,95 :

$$1 - \frac{6,63}{0,0196 N} \geq 0,95 \iff \frac{6,63}{0,0196 N} \leq 0,05 \iff N \geq \frac{6,63}{0,05 \times 0,0196} = \frac{6,63}{0,00098}$$

(on a multiplié par $N > 0$ et divisé par $0,05 > 0$, ce qui conserve le sens de l'inégalité). Or

$$\frac{6,63}{0,00098} = \frac{663\,000}{98} = \frac{331\,500}{49} \approx 6765,3.$$

Comme N est un entier, la condition s'écrit $N \geq 6766$: pour $N = 6765$, le minorant vaut $1 - \frac{6,63}{0,0196 \times 6765} \approx 0,949998 < 0,95$, tandis que pour $N = 6766$ il vaut environ $0,950005 \geq 0,95$. La plus petite valeur cherchée est donc

$$N = 6766.$$

Interprétation : en organisant la collecte dans au moins 6766 villes, on est certain (au sens de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev) que le nombre moyen de donneurs universels par échantillon s'écarte de moins de 0,14 de sa valeur théorique 7,14 avec une probabilité d'au moins 0,95.

Ce que le correcteur attend : le passage explicite de $\{7 < M_N < 7,28\}$ à l'écart absolu $|M_N - 7,14| < 0,14$ (l'intervalle est bien centré en 7,14 : $7,14 - 0,14 = 7$ et $7,14 + 0,14 = 7,28$), puis à l'événement contraire ; et la précision que 6766 est une taille *suffisante* : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev n'est pas optimale, la probabilité réelle dépasse sans doute 0,95 pour bien moins de villes, mais l'inégalité ne permet pas de l'affirmer.

Exercice 2

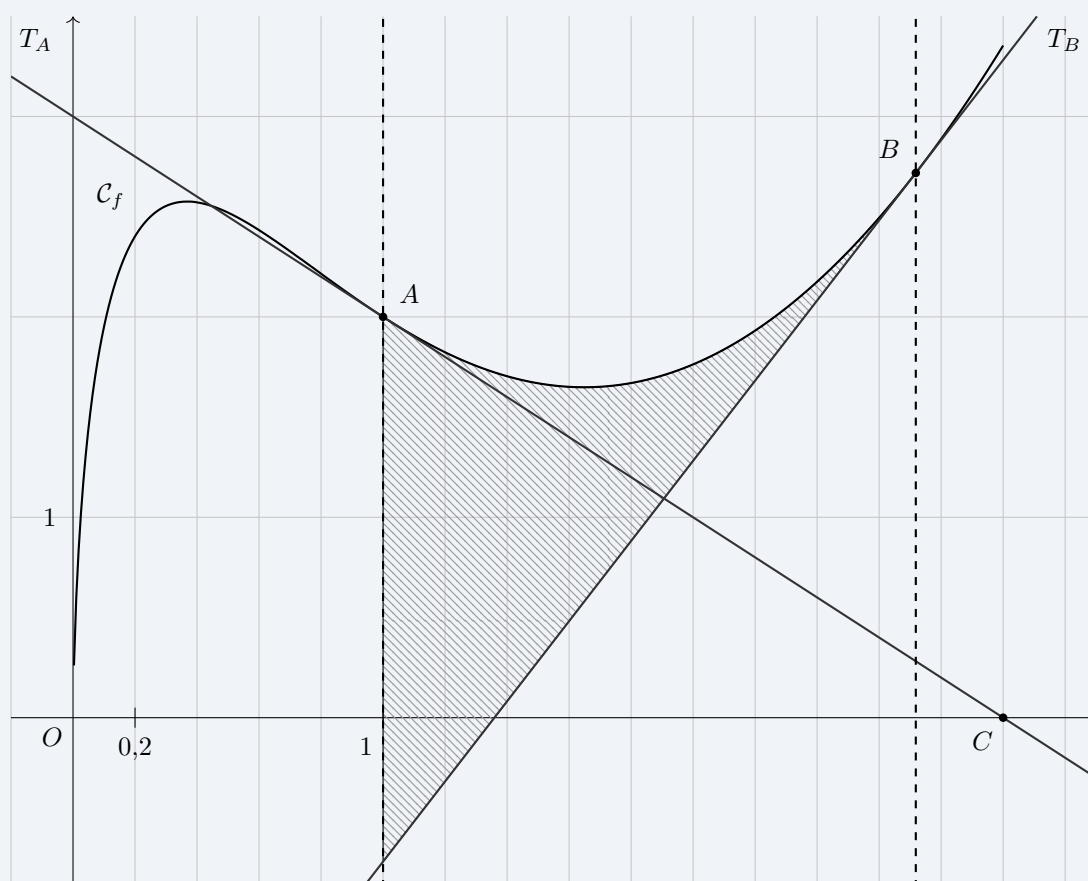
Sujet — Exercice 2 — 6 points

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f , notée $\mathcal{C}_f$, sur l'intervalle $]0; 3]$;
- la droite T_A , tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1; 2)$;
- la droite T_B , tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $B(e; e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3; 0)$.



Partie A : Lectures graphiques On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0; 3]$?
 3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : Étude de la fonction f On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x(2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2)$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
 En déduire que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
 2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
 On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.
 3. On admet que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.
 3.a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4 \ln x + 1)$.
 3.b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
 3.c. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire 1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2 + 1}{4}$.

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente T_B , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

On admet que $\int_1^e x(\ln x)^2 \, dx = \frac{e^2 - 1}{4}$.

En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

Corrigé

Partie A : Lectures graphiques 1. Le nombre dérivé $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. Cette droite passe par $A(1; 2)$ et par $C(3; 0)$, donc son coefficient directeur vaut

$$f'(1) = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{0 - 2}{3 - 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

On lit d'ailleurs sur le graphique que T_A descend d'une unité quand on avance d'une unité : $f'(1) = -1$.

2. Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale. Sur $]0; 3]$, la courbe présente deux tels points : un maximum local, d'abscisse comprise entre 0,2 et 0,4 (environ 0,37), et un minimum local, d'abscisse comprise entre 1,6 et 1,8 (environ 1,65). Partout ailleurs sur $]0; 3]$ la courbe est strictement monotone (croissante avant le maximum, décroissante entre les deux extremums, croissante après le minimum), donc la tangente n'y est jamais horizontale. L'équation $f'(x) = 0$ admet donc **exactement deux solutions** dans $]0; 3]$.

Vérification (hors lecture graphique) : avec l'expression de f' admise en partie B, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1 = (2 \ln x - 1)(\ln x + 1)$ s'annule pour $\ln x = \frac{1}{2}$ ou $\ln x = -1$, soit $x = \sqrt{e} \approx 1,65$ et $x = \frac{1}{e} \approx 0,37$, tous deux dans $]0; 3]$: cela confirme la lecture.

3. Au voisinage du point d'abscisse 0,2, la courbe $\mathcal{C}_f$ est « tournée vers le bas » : elle est située *au-dessous* de ses tangentes (la courbe monte de plus en plus lentement entre 0 et son

maximum, la pente des tangentes diminue). La fonction f est donc concave sur un intervalle contenant 0,2, ce qui, pour une fonction deux fois dérivable, équivaut à $f'' \leq 0$ sur cet intervalle. La courbe n'étant pas rectiligne autour de 0,2 (ce n'est pas un point d'inflexion), on conclut que $f''(0,2)$ est **strictement négatif**.

Ce que le correcteur attend : le lien « courbe sous ses tangentes $\iff f$ concave $\iff f'' \leq 0$ » explicitement énoncé, et non une simple affirmation du signe. (Avec la formule de la partie B, $f''(0,2) = \frac{4 \ln(0,2) + 1}{0,2} \approx -27,2 < 0$.)

Partie B : Étude de la fonction f 1. L'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$ est une équation du second degré, de discriminant

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0.$$

Elle n'admet donc **aucune solution réelle**.

Cherchons les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, c'est-à-dire les solutions de $f(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$f(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0.$$

Le cas $x = 0$ est exclu, car $0 \notin]0; +\infty[$. Pour le second facteur, posons $X = \ln x$: l'équation devient $2X^2 - 3X + 2 = 0$, qui n'a pas de solution réelle. Il n'existe donc aucun réel $x > 0$ tel que $f(x) = 0$: la courbe $\mathcal{C}_f$ **ne coupe pas l'axe des abscisses**.

Remarque. Comme $\Delta < 0$ et que le coefficient de X^2 est $2 > 0$, le trinôme $2X^2 - 3X + 2$ est strictement positif pour tout réel X ; avec $x > 0$, on obtient même $f(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$: la courbe est entièrement au-dessus de l'axe des abscisses, ce que confirme le graphique.

2. Posons $X = \ln x$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $X = \ln x \rightarrow +\infty$ (limite de référence). Pour $X \neq 0$,

$$2X^2 - 3X + 2 = X^2 \left(2 - \frac{3}{X} + \frac{2}{X^2} \right).$$

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{3}{X} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2}{X^2} = 0$, donc par somme $\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{X} + \frac{2}{X^2} \right) = 2$, et par produit avec $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 = +\infty$:

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} (2X^2 - 3X + 2) = +\infty.$$

Par composition (avec $X = \ln x \rightarrow +\infty$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2) = +\infty$. Enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Ce que le correcteur attend : la levée de l'indétermination « $+\infty - \infty$ » dans $2(\ln x)^2 - 3 \ln x$ (par factorisation du terme dominant, ou en écrivant $\ln x (2 \ln x - 3) + 2$, produit de deux quantités tendant vers $+\infty$), et non un simple « les termes en $\ln$ tendent vers l'infini ».

3.a. La fonction f' est dérivable sur $]0; +\infty[$ (l'énoncé admet que f est deux fois dérivable). Dérivons $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$ terme à terme :

— $x \mapsto (\ln x)^2$ est de la forme u^2 avec $u = \ln$, de dérivée $2u'u$, soit $2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2 \ln x}{x}$;

donc $x \mapsto 2(\ln x)^2$ a pour dérivée $\frac{4 \ln x}{x}$;

— $x \mapsto \ln x$ a pour dérivée $\frac{1}{x}$;

— la constante -1 a une dérivée nulle.

Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{4 \ln x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (4 \ln x + 1).$$

3.b. Sur $]0; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$: le signe de $f''(x)$ est celui de $4 \ln x + 1$. Comme la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$:

$$4 \ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -\frac{1}{4} \iff x > e^{-1/4},$$

et de même $4 \ln x + 1 = 0 \iff x = e^{-1/4}$, $4 \ln x + 1 < 0 \iff 0 < x < e^{-1/4}$. D'où le tableau de signe :

x	0		$e^{-1/4}$		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	
f		concave	inflexion	convexe	

D'après la caractérisation de la convexité par la dérivée seconde : f est **concave** sur $]0; e^{-1/4}]$ (car $f'' \leq 0$) et **convexe** sur $[e^{-1/4}; +\infty[$ (car $f'' \geq 0$). La dérivée seconde s'annule *en changeant de signe* en $e^{-1/4}$: la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion, d'abscisse exacte

$$x_0 = e^{-1/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 0,78.$$

(Son ordonnée vaut $f(e^{-1/4}) = e^{-1/4} \left(\frac{2}{16} + \frac{3}{4} + 2 \right) = \frac{23}{8} e^{-1/4} \approx 2,24$.) Cette valeur est cohérente avec la partie A : $0,2 < e^{-1/4}$, donc $f''(0,2) < 0$.

Ce que le correcteur attend : pour le point d'inflexion, ne pas se contenter de « f'' s'annule » : il faut le *changement de signe*. Et la valeur exacte $e^{-1/4}$, pas seulement 0,78.

3.c. On a $e^{-1/4} < 1$ (car $-\frac{1}{4} < 0$ et $e^0 = 1$), donc $[1; +\infty[\subset [e^{-1/4}; +\infty[$: d'après la question précédente, f est convexe sur l'intervalle $[1; +\infty[$. D'après le théorème du cours, une fonction convexe sur un intervalle a sa courbe située *au-dessus de chacune de ses tangentes* sur cet intervalle. Or B a pour abscisse $e \in [1; +\infty[$: la tangente T_B en B est une tangente à $\mathcal{C}_f$ en un point de cet intervalle. Par conséquent, pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 2x - e$ (équation de T_B , partie C) : la courbe $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus de T_B sur $[1; +\infty[$** , avec contact au seul point B .

Ce que le correcteur attend : l'inclusion $[1; +\infty[\subset [e^{-1/4}; +\infty[$ justifiée (comparer $e^{-1/4}$ à 1), et le théorème « convexe $\Rightarrow$ courbe au-dessus de ses tangentes » cité ; on ne demande pas d'étudier $g(x) = f(x) - (2x - e)$, ce qui serait une autre méthode valable (avec $g'(x) = f'(x) - 2$, $g' \leq 0$ sur $[1; e]$ et $g' \geq 0$ sur $[e; +\infty[$, minimum $g(e) = 0$).

Partie C : Calcul d'aire 1. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse e a pour équation réduite $y = f'(e)(x - e) + f(e)$. Comme $\ln e = 1$:

$$f'(e) = 2 \times 1^2 + 1 - 1 = 2 \quad \text{et} \quad f(e) = e(2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 2) = e \times 1 = e$$

(on retrouve bien $B(e; e) \in \mathcal{C}_f$). Donc

$$T_B : y = 2(x - e) + e = 2x - 2e + e = 2x - e.$$

2. Posons, pour $x \in [1; e]$:

$$u(x) = \ln x, \quad v'(x) = x, \quad \text{d'où} \quad u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1; e]$, de dérivées u' et v' continues sur cet intervalle. D'après la formule d'intégration par parties, $\int_1^e u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x) dx$:

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} dx = \left(\frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1^2}{2} \ln 1 \right) - \int_1^e \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{e^2}{2} - 0 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$

On a bien $\int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$ (soit environ 2,10).

3. D'après la partie B (question 3.c), sur $[1; e]$ la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite T_B : pour tout $x \in [1; e]$, $f(x) - (2x - e) \geq 0$. L'aire du domaine compris entre les deux courbes et les droites $x = 1$ et $x = e$ est donc, en unités d'aire, l'intégrale de la différence (fonction continue et positive) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e (f(x) - (2x - e)) dx = \int_1^e (2x(\ln x)^2 - 3x \ln x + 2x - 2x + e) dx \\ &= \int_1^e (2x(\ln x)^2 - 3x \ln x + e) dx. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, avec le résultat admis et la question 2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2 \int_1^e x(\ln x)^2 dx - 3 \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e e dx \\ &= 2 \times \frac{e^2 - 1}{4} - 3 \times \frac{e^2 + 1}{4} + [ex]_1^e = \frac{2e^2 - 2}{4} - \frac{3e^2 + 3}{4} + e^2 - e \\ &= \frac{2e^2 - 2 - 3e^2 - 3 + 4e^2 - 4e}{4} = \frac{3e^2 - 4e - 5}{4}. \end{aligned}$$

La valeur exacte de l'aire du domaine hachuré est

$$\mathcal{A} = \frac{3e^2 - 4e - 5}{4} \text{ unité d'aire,}$$

soit environ 1,57 unité d'aire (on vérifie que cette valeur est positive, comme il se doit).

Ce que le correcteur attend : la position relative « $\mathcal{C}_f$ au-dessus de T_B » rappelée avant d'écrire l'aire comme l'intégrale de $f(x) - (2x - e)$ (et non de $(2x - e) - f(x)$) ; la simplification des termes $2x$ avant d'intégrer ; la valeur exacte donnée avant l'approximation. L'unité d'aire n'est pas le cm^2 : le repère est orthogonal, non orthonormé.

Exercice 3

Sujet — Exercice 3 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1; 0; 5)$ et $B(3; 2; -1)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB) .

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
- la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z + 1 = 0$.

Affirmation 4 : La distance du point $C(2; -1; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

Corrigé

1. Affirmation 1 : VRAIE.

Une représentation paramétrique de droite se lit ainsi : le point obtenu pour $t = 0$ est un point de la droite, et les coefficients de t sont les coordonnées d'un vecteur directeur. La droite Δ décrite par le système proposé passe donc par le point de coordonnées $(3; 2; -1)$, qui est le point B , et elle est dirigée par le vecteur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 2 - 0 \\ -1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2\vec{u}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires (et non nuls), donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) . La droite Δ et la droite (AB) passent toutes deux par B et ont la même direction : elles sont confondues. Le système proposé est bien une représentation paramétrique de (AB) : **l'affirmation 1 est vraie.**

Autre vérification : le point A appartient à Δ , car $3 - 2t = -1$, $2 - t = 0$ et $-1 + 3t = 5$ sont vérifiées simultanément pour $t = 2$. Une droite passant par A et B (points distincts) est nécessairement (AB) .

Ce que le correcteur attend : deux vérifications, pas une : un point de (AB) sur la droite et un vecteur directeur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ (ou bien les deux points A et B sur la droite). Le vecteur directeur $\vec{u}$ n'est pas égal à $\overrightarrow{AB}$, il lui est seulement colinéaire : cela suffit.

1. Affirmation 2 : FAUSSE.

Les points O , A et B définissent un plan, car les vecteurs

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée de $\overrightarrow{OA}$ est nulle, celle de $\overrightarrow{OB}$ ne l'est pas : aucun réel λ ne vérifie $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA}$). Un vecteur est normal au plan (OAB) si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Le repère étant orthonormé, on calcule les produits scalaires avec les coordonnées :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 5 \times (-1) + (-2) \times 0 + 1 \times 5 = -5 + 0 + 5 = 0,$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = 5 \times 3 + (-2) \times 2 + 1 \times (-1) = 15 - 4 - 1 = 10 \neq 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ mais *pas* à $\overrightarrow{OB}$: il n'est pas orthogonal à tous les vecteurs du plan (OAB) , donc il n'est pas normal à ce plan. **L'affirmation 2 est fausse.**

Ce que le correcteur attend : le second produit scalaire, non nul, est le contre-exemple qui tranche ; un seul produit scalaire nul ne prouve rien. (Pour information, un vecteur normal à (OAB) est par exemple $\vec{m}(5; -7; 1)$: on vérifie $5 \times (-1) - 7 \times 0 + 1 \times 5 = 0$ et $5 \times 3 - 7 \times 2 + 1 \times (-1) = 0$.)

2. Affirmation 3 : FAUSSE.

Deux droites de l'espace sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes. Les vecteurs directeurs se lisent sur les représentations paramétriques :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ pour } d, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ pour } d'.$$

Ils ne sont pas colinéaires : si l'on avait $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, la première coordonnée donnerait $\lambda = 4$ et la deuxième $\lambda = -4$, ce qui est contradictoire. Les droites d et d' ne sont donc pas parallèles : elles sont soit sécantes (donc coplanaires), soit non coplanaires. Cherchons un point commun, c'est-à-dire un couple $(k; s)$ de réels tel que les deux points de paramètres k et s coïncident :

$$\begin{cases} 15 + k = 1 + 4s \\ 8 - k = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases} \iff \begin{cases} k = 4s - 14 \\ 8 - (4s - 14) = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases} \iff \begin{cases} k = 4s - 14 \\ 22 - 4s = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases}$$

La deuxième équation donne $8s = 20$, soit $s = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$, puis $k = 4 \times \frac{5}{2} - 14 = 10 - 14 = -4$. Reste à contrôler que la troisième équation est satisfaite par ce couple :

$$-6 + 2k = -6 + 2 \times (-4) = -14 \quad \text{et} \quad 1 - 6s = 1 - 6 \times \frac{5}{2} = 1 - 15 = -14.$$

Elle l'est. Le système admet la solution $(k; s) = \left(-4; \frac{5}{2}\right)$: les droites d et d' ont un point commun, le point I de paramètre $k = -4$ sur d , de coordonnées

$$I(15 - 4; 8 + 4; -6 - 8) = I(11; 12; -14),$$

qu'on retrouve sur d' avec $s = \frac{5}{2}$: $(1 + 10; 2 + 10; 1 - 15) = (11; 12; -14)$. Les droites d et d' sont sécantes en I , donc coplanaires : **l'affirmation 3 est fausse.**

Ce que le correcteur attend : la vérification de la troisième équation avec les valeurs trouvées : deux équations suffisent à déterminer k et s , mais c'est la troisième qui décide entre « sécantes » et « non coplanaires ». Et ne pas conclure « non coplanaires » à partir de la seule non-colinéarité des vecteurs directeurs.

3. Affirmation 4 : VRAIE.

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x - y + z + 1 = 0$: le repère étant orthonormé, il admet

pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculons la distance de C à $\mathcal{P}$ en déterminant le projeté orthogonal H de C sur $\mathcal{P}$.

La droite Δ passant par $C(2; -1; 2)$ et orthogonale à $\mathcal{P}$ est dirigée par $\vec{n}$; une représentation paramétrique en est

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Le point H est l'intersection de Δ et de $\mathcal{P}$: son paramètre λ vérifie l'équation du plan :

$$(2 + \lambda) - (-1 - \lambda) + (2 + \lambda) + 1 = 0 \iff 3\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = -2.$$

D'où $H(2 - 2; -1 + 2; 2 - 2) = H(0; 1; 0)$. On vérifie que $H \in \mathcal{P}$: $0 - 1 + 0 + 1 = 0$. La distance de C à $\mathcal{P}$ est la longueur CH :

$$CH = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - (-1))^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}.$$

L'affirmation 4 est vraie.

Autre méthode : la formule du cours donnant la distance d'un point $M_0(x_0; y_0; z_0)$ au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ en repère orthonormé,

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

donne directement

$$d(C, \mathcal{P}) = \frac{|2 - (-1) + 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Ce que le correcteur attend : la distance d'un point à un plan est la distance au projeté orthogonal (le point du plan le plus proche), pas à un point quelconque du plan ; le calcul de H doit donc utiliser la droite dirigée par le vecteur normal. Si l'on emploie la formule directe, le repère orthonormé doit être mentionné, et la valeur absolue ne doit pas être oubliée.

Exercice 4

Sujet — Exercice 4 — 5 points

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles. La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret Pour tout entier naturel n , on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024 + n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02 u_n^2 + 1,3 u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
2. On note h la fonction définie sur $[0; 20]$ par $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$.
On admet que h est croissante sur $[0; 20]$.
- 2.a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
- 2.b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
- 2.c. Justifier que $L = 15$.
3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.
- 3.a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
- 3.b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
1  def seuil():
2      n=0
3      u=1
4      while ..... :
5          n= .....
6          u= .....
7      return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t , en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant :

— $f(0) = 1$;

- f ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$;
- f est dérivable sur $[0; +\infty[$;
- f est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_1) : y' = 0,02y(15 - y)$.

On admet qu'une telle fonction f existe; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.

On note f' la fonction dérivée de f .

1. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.

Montrer que g est solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' = -0,3y + 0,02$.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2) .

3. En déduire que pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1}.$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Partie A : étude d'un modèle discret 1. Le premier juillet 2025 correspond à $n = 1$ (année $2024 + 1$). D'après la relation de récurrence, avec $u_0 = 1$:

$$u_1 = -0,02 \times u_0^2 + 1,3 \times u_0 = -0,02 \times 1 + 1,3 \times 1 = -0,02 + 1,3 = 1,28.$$

D'après ce modèle, la posidonie devrait recouvrir 1,28 ha au premier juillet 2025.

2.a. Remarquons d'abord que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = h(u_n)$: la fonction h est la fonction de récurrence de la suite. Calculons les deux valeurs utiles :

$$h(1) = -0,02 + 1,3 = 1,28 \quad \text{et} \quad h(20) = -0,02 \times 400 + 1,3 \times 20 = -8 + 26 = 18.$$

Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$$

est vraie.

Initialisation. Pour $n = 0$: $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,28$ (question 1), donc $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 20$ s'écrit $1 \leq 1 \leq 1,28 \leq 20$, ce qui est vrai. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$. Les trois nombres 1, u_n et u_{n+1} appartiennent alors à $[0; 20]$, de même que 20. Comme h est croissante sur $[0; 20]$, elle conserve l'ordre de ces nombres :

$$h(1) \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(20), \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1,28 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 18.$$

Or $1 \leq 1,28$ et $18 \leq 20$, donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

Ce que le correcteur attend : la croissance de h ne s'applique qu'à des nombres de $[0; 20]$, ce que garantit l'hypothèse de récurrence ; et l'encadrement obtenu (1,28 et 18) est *plus fin* que celui visé, il faut donc écrire explicitement le relâchement « $1 \leq 1,28$ et $18 \leq 20$ ».

- 2.b. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n :

- $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante ;

— $u_n \leq 20$: la suite (u_n) est majorée par 20.

D'après le *théorème de convergence monotone*, toute suite croissante et majorée est convergente : la suite (u_n) converge vers un réel L . De plus, comme $1 \leq u_n \leq 20$ pour tout n , par passage à la limite dans les inégalités, $1 \leq L \leq 20$.

2.c. La fonction h est une fonction polynôme du second degré, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; 20]$; tous les termes de la suite sont dans $[1; 20] \subset [0; 20]$, et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout n . Puisque (u_n) converge vers $L \in [1; 20]$, la propriété du cours sur la limite d'une suite récurrente (« L est un point fixe de h ») donne $h(L) = L$: en effet, $u_{n+1} \rightarrow L$ et, par continuité de h en L , $h(u_n) \rightarrow h(L)$; l'unicité de la limite impose $h(L) = L$. Résolvons cette équation :

$$h(L) = L \iff -0,02L^2 + 1,3L = L \iff -0,02L^2 + 0,3L = 0 \iff L(-0,02L + 0,3) = 0.$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $L = 0$ ou $-0,02L + 0,3 = 0 \iff L = \frac{0,3}{0,02} = 15$. Or $L \geq 1$, ce qui exclut $L = 0$. Donc $L = 15$: d'après ce modèle, la superficie recouverte tend vers 15 ha.

Ce que le correcteur attend : la continuité de h citée (c'est l'hypothèse qui autorise le passage à la limite dans $u_{n+1} = h(u_n)$), les deux points fixes trouvés, et l'élimination de 0 par l'encadrement $L \geq 1$ — sans cet argument, la réponse « $L = 15$ » n'est pas justifiée.

3.a. La suite (u_n) converge vers 15. Par définition de la limite, tout intervalle ouvert contenant 15 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. L'intervalle $]14; 16[$ contient 15 : il existe donc un rang n_0 à partir duquel $u_n \in]14; 16[$, en particulier $u_n > 14$. Ainsi, d'après ce modèle, la superficie recouverte dépassera 14 hectares (et, la suite étant croissante, restera ensuite au-dessus de ce seuil).

Ce que le correcteur attend : l'argument « la limite 15 est strictement supérieure à 14 », traduit par la définition de la convergence ; « la suite est croissante » ne suffit pas seul (une suite croissante peut converger vers 14 sans jamais le dépasser).

3.b. C'est un algorithme de seuil : on avance dans la suite tant que le seuil de 14 ha n'est pas dépassé. À l'entrée dans la boucle, la variable u contient u_n et la variable n contient l'indice n ; on passe au rang suivant en incrémentant n et en calculant u_{n+1} par la relation de récurrence.

```

1  def seuil():
2      n=0
3      u=1
4      while u <= 14 :
5          n= n + 1
6          u= -0.02 * u**2 + 1.3 * u
7      return n

```

La boucle s'arrête dès que u dépasse strictement 14 : la fonction renvoie alors le premier entier n tel que $u_n > 14$, c'est-à-dire le nombre d'années au bout duquel la posidonie dépasse 14 ha (la question 3.a garantit que la boucle se termine). L'ordre des deux lignes du corps de boucle est sans importance ici, car le calcul de u n'utilise pas n .

En exécutant l'algorithme (ou en calculant les termes de proche en proche : $u_{16} \approx 13,35$, $u_{17} \approx 13,79$, $u_{18} \approx 14,12$), on obtient `seuil() = 18` : la posidonie dépassera 14 ha au premier juillet 2042.

Remarque. Écrire `while u < 14` conduit ici au même résultat, car aucun terme de la suite n'est exactement égal à 14 ; la condition `u <= 14` est celle qui traduit fidèlement « tant que la superficie ne dépasse pas 14 ha ».

Partie B : étude d'un modèle continu 1. La fonction f est dérivable et ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$, donc $g = \frac{1}{f}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$, de dérivée (formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$) :

$$g'(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)^2}.$$

Comme f est solution de (E_1) , $f'(t) = 0,02 f(t) (15 - f(t))$ pour tout $t \geq 0$. En remplaçant, puis en simplifiant par $f(t) \neq 0$:

$$g'(t) = -\frac{0,02 f(t) (15 - f(t))}{f(t)^2} = -\frac{0,02 (15 - f(t))}{f(t)} = -\frac{0,3}{f(t)} + 0,02 = -0,3 g(t) + 0,02.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $g'(t) = -0,3 g(t) + 0,02$: la fonction g est solution de (E_2) .

Ce que le correcteur attend : la justification de la dérivabilité de g (par « f ne s'annule pas »), puis le remplacement de f' par l'expression donnée par (E_1) ; la simplification par $f(t)$ doit faire apparaître $\frac{1}{f(t)} = g(t)$.

2. L'équation (E_2) : $y' = -0,3 y + 0,02$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,3 \neq 0$ et $b = 0,02$. D'après le théorème du cours, ses solutions sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $[0; +\infty[$) sont les fonctions

$$t \mapsto C e^{-0,3t} - \frac{b}{a} = C e^{-0,3t} + \frac{0,02}{0,3} = C e^{-0,3t} + \frac{1}{15}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(La solution constante $\frac{1}{15}$ s'obtient en résolvant $0 = -0,3 y + 0,02$.)

3. D'après les questions 1 et 2, il existe un réel C tel que, pour tout $t \geq 0$, $g(t) = C e^{-0,3t} + \frac{1}{15}$.

La condition initiale $f(0) = 1$ donne $g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1$, d'où

$$C e^0 + \frac{1}{15} = 1 \iff C = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}.$$

Donc, pour tout $t \geq 0$:

$$g(t) = \frac{14}{15} e^{-0,3t} + \frac{1}{15} = \frac{14 e^{-0,3t} + 1}{15},$$

et, puisque $f = \frac{1}{g}$ (avec $g(t) > 0$, somme de termes strictement positifs) :

$$f(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{15}{14 e^{-0,3t} + 1}.$$

On vérifie : $f(0) = \frac{15}{14 + 1} = 1$.

4. On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,3t) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,3t} = 0$. Par produit et somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (14 e^{-0,3t} + 1) = 1$, puis par quotient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{15}{1} = 15.$$

Comme dans le modèle discret, la superficie recouverte par la posidonie tend vers 15 ha : la droite d'équation $y = 15$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

5. Pour tout $t \geq 0$, le dénominateur $14e^{-0,3t} + 1$ est strictement positif : on peut multiplier les deux membres par ce dénominateur sans changer le sens de l'inégalité :

$$\begin{aligned} f(t) > 14 &\iff \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1} > 14 \iff 15 > 14(14e^{-0,3t} + 1) \iff 15 > 196e^{-0,3t} + 14 \\ &\iff 196e^{-0,3t} < 1 \iff e^{-0,3t} < \frac{1}{196} \\ &\iff -0,3t < \ln\left(\frac{1}{196}\right) = -\ln 196 \iff t > \frac{\ln 196}{0,3}. \end{aligned}$$

La troisième ligne utilise la stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$ (les deux membres sont strictement positifs), puis $\ln\left(\frac{1}{196}\right) = -\ln 196$; la dernière équivalence est une division par $-0,3 < 0$, qui change le sens de l'inégalité. Or $\frac{\ln 196}{0,3} = \frac{2 \ln 14}{0,3} \approx 17,59$, et cette valeur appartient bien à $[0; +\infty[$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) > 14$ dans $[0; +\infty[$ est donc

$$S = \left] \frac{\ln 196}{0,3} ; +\infty \right[\approx]17,59 ; +\infty[.$$

Interprétation : d'après le modèle continu, la superficie recouverte par la posidonie dépasse 14 ha au bout d'environ 17,6 années après le premier juillet 2024, soit au cours du premier semestre 2042 (environ 17 ans et 7 mois, c'est-à-dire vers février 2042), et reste ensuite supérieure à 14 ha. Ce résultat est cohérent avec le modèle discret, qui donnait le premier juillet 2042.

Ce que le correcteur attend : la positivité du dénominateur justifiée avant de « passer en croix », le changement de sens de l'inégalité lors de la division par $-0,3$, la valeur exacte $\frac{\ln 196}{0,3}$ avant son approximation, et une interprétation qui convertit la durée en date en repartant du premier juillet 2024.