

Mathématiques

Baccalauréat général 2025 — épreuve de spécialité

Métropole, mercredi 18 juin 2025 (25-MATJ2ME1)

Corrigé

Quatre exercices

Exercice 1

Sujet — Exercice 1 — 5 points

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans cet exercice, on s'intéresse à des personnes venues séjourner dans un centre multisports au cours d'un week-end.

Les résultats des probabilités demandées seront arrondis au millième si nécessaire.

Partie A Le centre propose aux personnes venues pour un week-end une formule d'initiation au roller composée de deux séances de cours. On choisit au hasard une personne parmi celles ayant souscrit à cette formule.

On désigne par A et B les événements suivants :

- A : « La personne chute pendant la première séance » ;
- B : « La personne chute pendant la deuxième séance ».

Pour un événement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et $\bar{E}$ son événement contraire. Des observations permettent d'admettre que $P(A) = 0,6$.

De plus on constate que :

- si la personne chute pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de 0,3 ;
- si la personne ne chute pas pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de 0,4.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et interpréter le résultat.
3. Montrer que $P(B) = 0,34$.
4. La personne ne chute pas pendant la deuxième séance de cours. Calculer la probabilité qu'elle n'ait pas chuté lors de la première séance.
5. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, associe le nombre d'entre elles n'ayant chuté ni lors de la première ni lors de la deuxième séance. On assimile le choix d'un échantillon de 100 personnes à un tirage avec remise.
On admet que la probabilité qu'une personne ne chute ni lors de la première ni lors de la deuxième séance est de 0,24.
 - 5.a. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - 5.b. Quelle est la probabilité d'avoir, dans un échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, au moins 20 personnes qui ne chutent ni lors de la première ni lors de la deuxième séance ?
 - 5.c. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B On choisit au hasard une personne venue un week-end au centre multisports. On note T_1 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès

aux activités sportives pendant la journée du samedi, et T_2 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du dimanche.

On admet que :

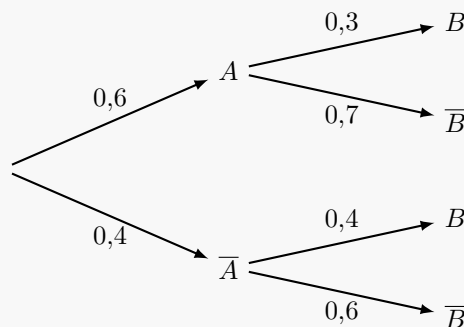
- T_1 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_1) = 40$ et d'écart-type $\sigma(T_1) = 10$;
- T_2 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_2) = 60$ et d'écart-type $\sigma(T_2) = 16$;
- les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.

On note T la variable aléatoire donnant le temps total d'attente avant les accès aux activités sportives lors des deux jours, exprimé en minute. Ainsi on a $T = T_1 + T_2$.

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer que la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T est égale à 356.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour une personne choisie au hasard parmi celles venues un week-end au centre multisports, la probabilité que son temps total d'attente T soit strictement compris entre 60 et 140 minutes est supérieure à 0,77.

Corrigé

Partie A 1. L'énoncé donne $P(A) = 0,6$, donc $P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$. Les deux constats sont des probabilités conditionnelles : $P_A(B) = 0,3$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,4$. Sur chaque nœud, la somme des probabilités des branches vaut 1, d'où $P_A(\bar{B}) = 1 - 0,3 = 0,7$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - 0,4 = 0,6$.



2. La probabilité d'un chemin de l'arbre est le produit des probabilités de ses branches :

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,4 \times 0,6 = 0,24.$$

Interprétation : la probabilité qu'une personne ayant souscrit à la formule ne chute à aucune des deux séances de cours est égale à 0,24 ; environ 24 % des personnes traversent les deux séances sans chuter.

3. Les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B),$$

soit

$$P(B) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 = 0,18 + 0,16 = 0,34.$$

4. On sait que la personne n'a pas chuté à la deuxième séance (événement $\bar{B}$, réalisé) et l'on cherche la probabilité qu'elle n'ait pas chuté à la première : c'est la probabilité conditionnelle

$P_{\overline{B}}(\overline{A})$. Par définition,

$$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}.$$

Or $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,34 = 0,66$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,24$ (question 2). Donc

$$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{0,24}{0,66} = \frac{24}{66} = \frac{4}{11} = 0,3636 \dots \approx 0,364.$$

Sachant que la personne n'a pas chuté à la deuxième séance, la probabilité qu'elle n'ait pas chuté non plus à la première est d'environ 0,364.

Ce que le correcteur attend : le conditionnement est « sachant $\overline{B}$ », lu à l'envers de l'arbre ; il faut passer par la définition $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) / P(\overline{B})$ et non lire 0,6 sur une branche.

5.a. On considère l'épreuve de Bernoulli qui consiste à choisir une personne ayant souscrit à la formule et à regarder si elle « ne chute ni à la première ni à la deuxième séance » (succès, de probabilité $p = 0,24$ d'après l'énoncé) ou non (échec, de probabilité $1 - p = 0,76$). Le choix de l'échantillon étant assimilé à un tirage avec remise, cette épreuve est répétée $n = 100$ fois de façon identique et indépendante : c'est un schéma de Bernoulli de paramètres 100 et 0,24. La variable aléatoire X compte le nombre de succès parmi ces 100 répétitions : elle suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,24)$.

5.b. On cherche $P(X \geq 20)$. On passe par l'événement contraire :

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19).$$

À la calculatrice (fonction de répartition de la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,24)$), $P(X \leq 19) \approx 0,1453$, d'où

$$P(X \geq 20) \approx 1 - 0,1453 = 0,8547 \approx 0,855.$$

La probabilité qu'au moins 20 personnes de l'échantillon ne chutent à aucune des deux séances est d'environ 0,855.

5.c. Pour une loi binomiale, $E(X) = np$:

$$E(X) = 100 \times 0,24 = 24.$$

Interprétation : si l'on constitue un grand nombre d'échantillons de 100 personnes ayant souscrit à la formule, le nombre de personnes qui ne chutent à aucune des deux séances vaut en moyenne 24 par échantillon.

Partie B 1. Par linéarité de l'espérance (propriété valable sans hypothèse d'indépendance) :

$$E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 40 + 60 = 100.$$

Interprétation : sur l'ensemble du week-end, une personne attend en moyenne 100 minutes, soit 1 h 40 min, avant d'accéder aux activités sportives.

2. Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont *indépendantes* : la variance de leur somme est la somme des variances,

$$V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2).$$

La variance est le carré de l'écart-type : $V(T_1) = \sigma(T_1)^2 = 10^2 = 100$ et $V(T_2) = \sigma(T_2)^2 = 16^2 = 256$. Ainsi

$$V(T) = 100 + 256 = 356.$$

Ce que le correcteur attend : l'hypothèse d'indépendance doit être citée, c'est elle qui autorise l'additivité de la variance ; on additionne les variances, jamais les écarts-types ($10 + 16 = 26$ et $26^2 = 676 \neq 356$).

3. Traduisons l'événement « T est strictement compris entre 60 et 140 » à l'aide de l'espérance $E(T) = 100$:

$$60 < T < 140 \iff 60 - 100 < T - 100 < 140 - 100 \iff -40 < T - 100 < 40,$$

c'est-à-dire $|T - 100| < 40$. L'événement cherché est donc $\{|T - E(T)| < 40\}$, dont le contraire est $\{|T - E(T)| \geq 40\}$.

La variable T admet une espérance $E(T) = 100$ et une variance $V(T) = 356$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée avec $\varepsilon = 40 > 0$:

$$P(|T - E(T)| \geq 40) \leq \frac{V(T)}{40^2} = \frac{356}{1600} = 0,2225.$$

En passant à l'événement contraire :

$$P(60 < T < 140) = P(|T - 100| < 40) = 1 - P(|T - 100| \geq 40) \geq 1 - 0,2225 = 0,7775.$$

Comme $0,7775 > 0,77$, la probabilité que le temps total d'attente d'une personne choisie au hasard soit strictement compris entre 60 et 140 minutes est bien supérieure à 0,77.

Ce que le correcteur attend : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev majore la probabilité de l'événement « $|T - E(T)| \geq \varepsilon$ » (les queues) ; pour minorer la probabilité de l'intervalle, on passe au contraire, et la réécriture $60 < T < 140 \iff |T - 100| < 40$ n'est possible que parce que 100 est le *centre* de l'intervalle $]60; 140[$. On ne connaît pas la loi de T : l'inégalité fournit une minoration, pas la valeur exacte.

Exercice 2

Sujet — Exercice 2 — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} ;$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d' : \begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - 2s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

Partie A 1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S\left(-\frac{1}{2}; 1; 4\right)$.

2.a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

2.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x + 2y + 4z - 7 = 0.$$

2.c. Démontrer que les points A , B , C et S ne sont pas coplanaires.

3.a. Démontrer que le point $H(-1; 0; 2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) .

3.b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B On considère un point M appartenant au segment $[CS]$. On a donc $\vec{CM} = k\vec{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0; 1]$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k .

2. Existe-t-il un point M sur le segment $[CS]$ tel que le triangle MAB soit rectangle en M ?

Corrigé

Partie A 1. Un point commun à d et d' correspond à un couple de paramètres $(t; s)$ pour lequel les deux représentations donnent les mêmes coordonnées :

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + 2t = s \\ 2 + t = \frac{3}{2} + s \\ 3 - t = 3 - 2s \end{cases}$$

La troisième équation donne $t = 2s$. En reportant dans la première : $\frac{3}{2} + 4s = s$, soit $3s = -\frac{3}{2}$, d'où $s = -\frac{1}{2}$ puis $t = 2s = -1$. Il reste à contrôler la deuxième équation avec ces valeurs : $2 + t = 2 - 1 = 1$ et $\frac{3}{2} + s = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$: elle est vérifiée. Le système admet donc une unique solution, $(t; s) = \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

Le point correspondant s'obtient avec $t = -1$ dans d :

$$x = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}, \quad y = 2 - 1 = 1, \quad z = 3 + 1 = 4,$$

et l'on retrouve les mêmes coordonnées avec $s = -\frac{1}{2}$ dans d' : $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$, $z = 3 + 1 = 4$. Les droites d et d' ont donc un unique point commun, $S\left(-\frac{1}{2}; 1; 4\right)$: elles sont sécantes en S .

Remarque. Les vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ de d et $\vec{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ de d' ne sont pas colinéaires (les premières coordonnées imposeraient $\vec{u} = 2\vec{u'}$, mais $1 \neq 2 \times 1$) : les droites ne sont ni parallèles ni confondues, ce qui confirme qu'elles sont sécantes.

2.a. Calculons deux vecteurs du plan (ABC) :

$$\vec{AB}\begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ -1 - 2 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{AC}\begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 1 - 2 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : s'il existait un réel λ tel que $\vec{AC} = \lambda\vec{AB}$, la troisième coordonnée donnerait $0 = \lambda$, puis la première $2 = 0$, ce qui est absurde. Les points A , B , C définissent donc bien un plan, dont $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont deux vecteurs directeurs.

Le repère étant orthonormé, on calcule les produits scalaires avec l'expression analytique :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times 2 + 2 \times (-3) + 4 \times 1 = 2 - 6 + 4 = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 4 \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ (non nul) est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est un vecteur normal au plan (ABC) .

2.b. D'après le théorème sur l'équation cartésienne d'un plan, le plan (ABC) , de vecteur normal $\vec{n}(1; 2; 4)$, admet une équation de la forme $x + 2y + 4z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$. Le point $A(-1; 2; 1)$ appartient au plan, donc

$$-1 + 2 \times 2 + 4 \times 1 + d = 0 \iff 7 + d = 0 \iff d = -7.$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $x + 2y + 4z - 7 = 0$.

Vérification : pour $B(1; -1; 2)$, $1 - 2 + 8 - 7 = 0$; pour $C(1; 1; 1)$, $1 + 2 + 4 - 7 = 0$. Les trois points vérifient bien l'équation.

2.c. Les points A, B, C et S sont coplanaires si et seulement si S appartient au plan (ABC) (les trois premiers définissant ce plan). Testons les coordonnées de $S\left(-\frac{1}{2}; 1; 4\right)$ dans l'équation :

$$-\frac{1}{2} + 2 \times 1 + 4 \times 4 - 7 = -\frac{1}{2} + 2 + 16 - 7 = \frac{21}{2} \neq 0.$$

Le point S n'appartient pas au plan (ABC) : les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3.a. Par définition, le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) est le point H tel que $H \in (ABC)$ et (SH) est orthogonale au plan (ABC) , c'est-à-dire $\vec{SH}$ colinéaire à un vecteur normal du plan. Vérifions ces deux conditions pour $H(-1; 0; 2)$.

— $H \in (ABC)$: $-1 + 2 \times 0 + 4 \times 2 - 7 = -1 + 8 - 7 = 0$, l'équation est vérifiée.

— $\vec{SH} \begin{pmatrix} -1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 - 1 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \vec{n}$: le vecteur $\vec{SH}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$, donc la droite (SH) est orthogonale au plan (ABC) .

Le point $H(-1; 0; 2)$ est donc le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) .

Autre méthode : la droite passant par S et dirigée par $\vec{n}$ a pour représentation paramétrique $x = -\frac{1}{2} + \lambda$, $y = 1 + 2\lambda$, $z = 4 + 4\lambda$; son intersection avec le plan vérifie $-\frac{1}{2} + \lambda + 2 + 4\lambda + 16 + 16\lambda - 7 = 0$, soit $21\lambda + \frac{21}{2} = 0$, d'où $\lambda = -\frac{1}{2}$ et le point $(-1; 0; 2) = H$.

3.b. Calculons la distance SH à partir des coordonnées de $\vec{SH}$:

$$SH = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 4} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Soit M un point quelconque du plan (ABC) . Si $M = H$, alors $SM = SH = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Si $M \neq H$, la droite (SH) est orthogonale au plan (ABC) , donc à toute droite de ce plan, en particulier à (HM) : le triangle SHM est rectangle en H , et le théorème de Pythagore donne

$$SM^2 = SH^2 + HM^2 > SH^2 \quad (\text{car } HM > 0),$$

d'où $SM > SH = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Dans tous les cas, $SM \geq \frac{\sqrt{21}}{2}$: il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

C'est le théorème du cours : le projeté orthogonal H est le point du plan le plus proche de S , et SH est la distance de S au plan (ABC) . On peut le contrôler avec la formule de la distance

$$\text{d'un point à un plan : } \frac{\left|-\frac{1}{2} + 2 + 16 - 7\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{21/2}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Ce que le correcteur attend : « en déduire » renvoie à la question précédente : il faut relier SM et SH par le triangle rectangle SHM (ou citer le théorème du projeté orthogonal, point le plus proche), et ne pas oublier le cas $M = H$ où l'égalité est atteinte.

Partie B 1. Le vecteur $\vec{CS}$ a pour coordonnées

$$\vec{CS} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - 1 \\ 1 - 1 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Notons $M(x; y; z)$. La relation $\vec{CM} = k\vec{CS}$ s'écrit coordonnée par coordonnée :

$$\begin{cases} x - 1 = -\frac{3}{2}k \\ y - 1 = 0 \\ z - 1 = 3k \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - \frac{3}{2}k \\ y = 1 \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$

Ainsi $M\left(1 - \frac{3}{2}k; 1; 1 + 3k\right)$ avec $k \in [0; 1]$. Pour $k = 0$ on retrouve C , pour $k = 1$ on retrouve S .

2. Le point M est distinct de A et de B (son ordonnée vaut 1, alors que $y_A = 2$ et $y_B = -1$), donc MAB est un vrai triangle, rectangle en M si et seulement si $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$. Calculons ces vecteurs :

$$\vec{MA} \begin{pmatrix} -1 - \left(1 - \frac{3}{2}k\right) \\ 2 - 1 \\ 1 - (1 + 3k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{3}{2}k \\ 1 \\ -3k \end{pmatrix}, \quad \vec{MB} \begin{pmatrix} 1 - \left(1 - \frac{3}{2}k\right) \\ -1 - 1 \\ 2 - (1 + 3k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}k \\ -2 \\ 1 - 3k \end{pmatrix}.$$

Le produit scalaire vaut

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \left(-2 + \frac{3}{2}k\right) \times \frac{3}{2}k + 1 \times (-2) + (-3k)(1 - 3k),$$

soit, en développant,

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -3k + \frac{9}{4}k^2 - 2 - 3k + 9k^2 = \frac{45}{4}k^2 - 6k - 2.$$

Le triangle MAB est rectangle en M si et seulement si

$$\frac{45}{4}k^2 - 6k - 2 = 0 \iff 45k^2 - 24k - 8 = 0.$$

C'est une équation du second degré de discriminant

$$\Delta = (-24)^2 - 4 \times 45 \times (-8) = 576 + 1440 = 2016 = 144 \times 14, \quad \sqrt{\Delta} = 12\sqrt{14}.$$

Elle admet deux solutions réelles :

$$k_1 = \frac{24 + 12\sqrt{14}}{90} = \frac{4 + 2\sqrt{14}}{15} \approx 0,766 \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{24 - 12\sqrt{14}}{90} = \frac{4 - 2\sqrt{14}}{15} \approx -0,232.$$

Comme M doit appartenir au segment $[CS]$, il faut $k \in [0; 1]$: $k_2 < 0$ ne convient pas, tandis que $0 \leq k_1 \leq 1$ (en effet $\sqrt{14} < 4$ donc $4 + 2\sqrt{14} < 12 < 15$).

Conclusion : il existe un unique point M du segment $[CS]$ tel que le triangle MAB soit rectangle en M , obtenu pour $k = \frac{4 + 2\sqrt{14}}{15}$, soit $M\left(1 - \frac{3}{2}k; 1; 1 + 3k\right) \approx (-0,15; 1; 3,30)$.

Vérification : pour cette valeur de k , $45k^2 = 24k + 8$, donc $MA^2 = \left(2 - \frac{3}{2}k\right)^2 + 1 + 9k^2 = 5 - 6k + \frac{45}{4}k^2 = 5 - 6k + 6k + 2 = 7$, et de même $MB^2 = \frac{9}{4}k^2 + 4 + (1 - 3k)^2 = 5 - 6k + \frac{45}{4}k^2 = 7$; or $AB^2 = 2^2 + (-3)^2 + 1^2 = 14 = 7 + 7$: la réciproque du théorème de Pythagore confirme l'angle droit en M (le triangle est même rectangle isocèle).

Ce que le correcteur attend : la question demande l'existence d'un point du segment : après avoir résolu l'équation, il faut trier les solutions avec la condition $k \in [0; 1]$ et conclure explicitement (oui, un seul point).

Exercice 3

Sujet — Exercice 3 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{1 + 5^n}{2 + 3^n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$.

2. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3.$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n , $w_n \geq n$.

3. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée dans un repère orthonormé sur la figure (Fig. 1) ci-dessous. On précise que :

- T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 8 ;
- l'axe des abscisses est la tangente horizontale à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

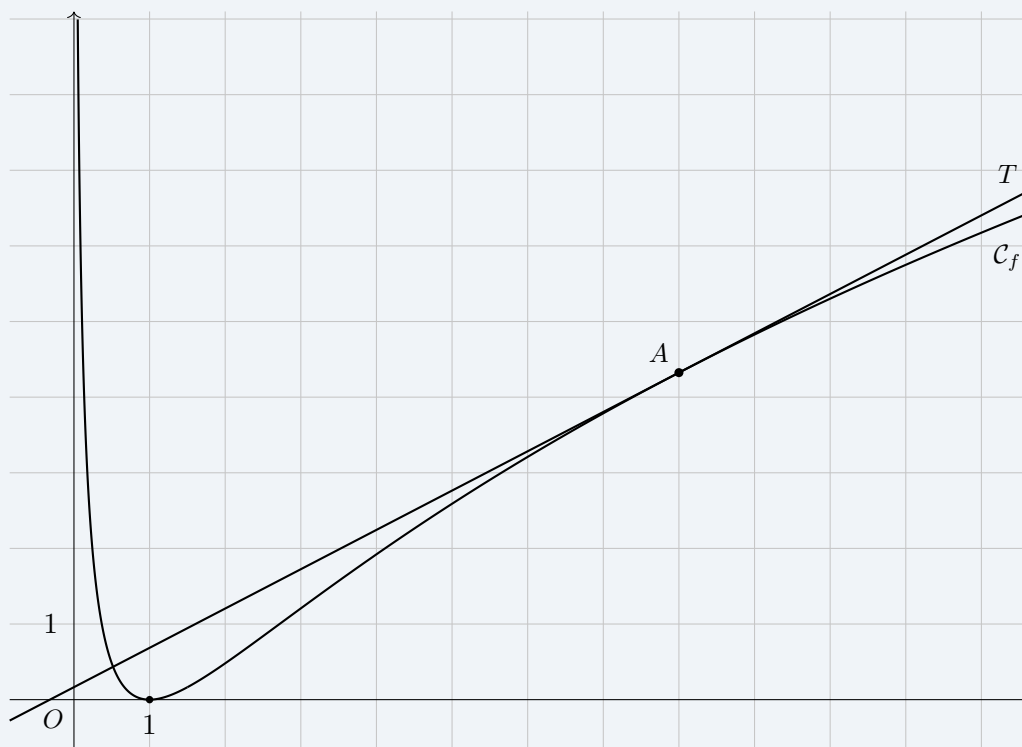


Fig. 1

Affirmation 3 : D'après le graphique, la fonction f est convexe sur son ensemble de définition.
4. Affirmation 4 : Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) - x + 1 \leq 0$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Corrigé

1. Affirmation 1 : FAUSSE.

Le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$ (car $5^n \rightarrow +\infty$ et $3^n \rightarrow +\infty$, suites géométriques de raisons $5 > 1$ et $3 > 1$) : la limite est une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ », que l'on lève en factorisant chaque membre par son terme prépondérant :

$$u_n = \frac{5^n \left(\frac{1}{5^n} + 1 \right)}{3^n \left(\frac{2}{3^n} + 1 \right)} = \left(\frac{5}{3} \right)^n \times \frac{1 + \left(\frac{1}{5} \right)^n}{1 + 2 \left(\frac{1}{3} \right)^n}.$$

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{5} \right)^n \rightarrow 0 \text{ et } \left(\frac{1}{3} \right)^n \rightarrow 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{5} < 1 \text{ et } -1 < \frac{1}{3} < 1; \text{ par somme puis quotient,} \\ & \frac{1 + \left(\frac{1}{5} \right)^n}{1 + 2 \left(\frac{1}{3} \right)^n} \rightarrow \frac{1}{1} = 1; \\ & - \left(\frac{5}{3} \right)^n \rightarrow +\infty \text{ car } \frac{5}{3} > 1. \end{aligned}$$

Par produit (limite d'un produit dont un facteur tend vers $+\infty$ et l'autre vers $1 > 0$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

La suite (u_n) diverge vers $+\infty$: elle ne converge pas vers $\frac{5}{3}$. L'affirmation 1 est fausse.

Ce que le correcteur attend : le piège est de « simplifier » $\frac{1+5^n}{2+3^n}$ comme s'il s'agissait de $\frac{1+5n}{2+3n}$, dont la limite serait $\frac{5}{3}$. Ici les exposants portent sur n : c'est le quotient des termes prépondérants $\frac{5^n}{3^n} = \left(\frac{5}{3} \right)^n$ qui gouverne la limite. Les premiers termes, $u_0 = \frac{2}{3}$, $u_1 = \frac{6}{5} = 1,2$, $u_2 = \frac{26}{11} \approx 2,36$, $u_5 \approx 12,8$, dépassent d'ailleurs vite $\frac{5}{3}$.

2. Affirmation 2 : VRAIE.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$: « $w_n \geq n$ » est vraie.

Initialisation. Pour $n = 0$, $w_0 = 0 \geq 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $w_n \geq n$ (hypothèse de récurrence). Montrons que $w_{n+1} \geq n+1$. En multipliant l'hypothèse de récurrence par $3 > 0$, on obtient $3w_n \geq 3n$, puis en ajoutant $-2n+3$ aux deux membres :

$$w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3 \geq 3n - 2n + 3 = n + 3.$$

Or $n+3 \geq n+1$, donc $w_{n+1} \geq n+1$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $w_n \geq n$. L'affirmation 2 est vraie.

Contrôle : $w_1 = 3$, $w_2 = 10$, $w_3 = 29$, $w_4 = 84$ sont bien supérieurs à 1, 2, 3, 4.

3. Affirmation 3 : FAUSSE.

D'après le cours, une fonction dérivable sur un intervalle est convexe sur cet intervalle si et seulement si sa courbe est située entièrement *au-dessus* de chacune de ses tangentes. Si f était

convexe sur $]0; +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ serait donc au-dessus de la tangente T au point A sur tout $]0; +\infty[$.

Or ce n'est pas ce que montre le graphique : entre les abscisses 1 et 8, la courbe $\mathcal{C}_f$ est *en dessous* de la droite T . Par exemple, au point d'abscisse 3, on lit sur $\mathcal{C}_f$ une ordonnée d'environ 1,2 alors que le point de T de même abscisse a une ordonnée d'environ 1,7 ; au point d'abscisse 1, la courbe est sur l'axe (ordonnée 0) alors que T passe à environ 0,7 au-dessus. La courbe est aussi en dessous de T à droite de A (à l'abscisse 12, environ 6,2 pour $\mathcal{C}_f$ contre 6,4 pour T). La courbe n'est donc pas au-dessus de sa tangente $T : f$ n'est pas convexe sur $]0; +\infty[$. L'affirmation 3 est fausse.

Complément. La courbe est au-dessus de sa tangente horizontale au point d'abscisse 1 (elle reste au-dessus de l'axe des abscisses) mais en dessous de sa tangente T au point A : la fonction est convexe au voisinage de 1 et concave au voisinage de 8, elle change de concavité entre les deux (point d'inflexion). On peut aussi le voir avec les sécantes : la corde joignant le point $(1; 0)$ au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 12 (ordonnée environ 6,2) passe, à l'abscisse 6, à l'ordonnée $\frac{5 \times 6,2}{11} \approx 2,8$, alors que la courbe y est à environ 3,2 : cette corde est en dessous de la courbe, alors qu'une fonction convexe a toutes ses cordes au-dessus de sa courbe.

Ce que le correcteur attend : une justification appuyée sur une propriété du cours (courbe au-dessus des tangentes, ou cordes au-dessus de la courbe, ou f' croissante) et une lecture graphique précise (des abscisses citées), pas seulement « ça ne ressemble pas à une fonction convexe ».

4. Affirmation 4 : VRAIE.

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) - x + 1$. Elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $1 - x$: $g'(x) > 0$ pour $0 < x < 1$, $g'(1) = 0$ et $g'(x) < 0$ pour $x > 1$. La fonction g est donc strictement croissante sur $]0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$: elle admet un maximum en $x = 1$, qui vaut

$$g(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0.$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $g(x) \leq g(1) = 0$, c'est-à-dire $\ln(x) - x + 1 \leq 0$. L'affirmation 4 est vraie (avec égalité seulement pour $x = 1$).

Autre lecture. L'inégalité $\ln(x) \leq x - 1$ exprime que la courbe de $\ln$, fonction concave sur $]0; +\infty[$ (car $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$), est en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1, d'équation $y = x - 1$.

Ce que le correcteur attend : l'étude complète du signe de la dérivée et la valeur du maximum $g(1) = 0$; affirmer « $\ln(x) \leq x - 1$, c'est du cours » sans justification ne rapporte rien.

Exercice 4

Sujet — Exercice 4 — 6 points

L'objet de cet exercice est l'étude de l'arrêt d'un chariot sur un manège, à partir du moment où il entre dans la zone de freinage en fin de parcours.

On note t le temps écoulé, exprimé en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage, exprimée en mètre, en fonction de t , à l'aide d'une fonction notée d définie sur $[0; +\infty[$.

On a ainsi $d(0) = 0$.

Par ailleurs, on admet que cette fonction d est dérivable sur son ensemble de définition. On note d' sa fonction dérivée.

Partie A Sur la figure (Fig. 2) ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_d$ de la fonction d ;
- la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_d$ au point A d'abscisse 4,7 ;
- l'asymptote Δ à $\mathcal{C}_d$ en $+\infty$.

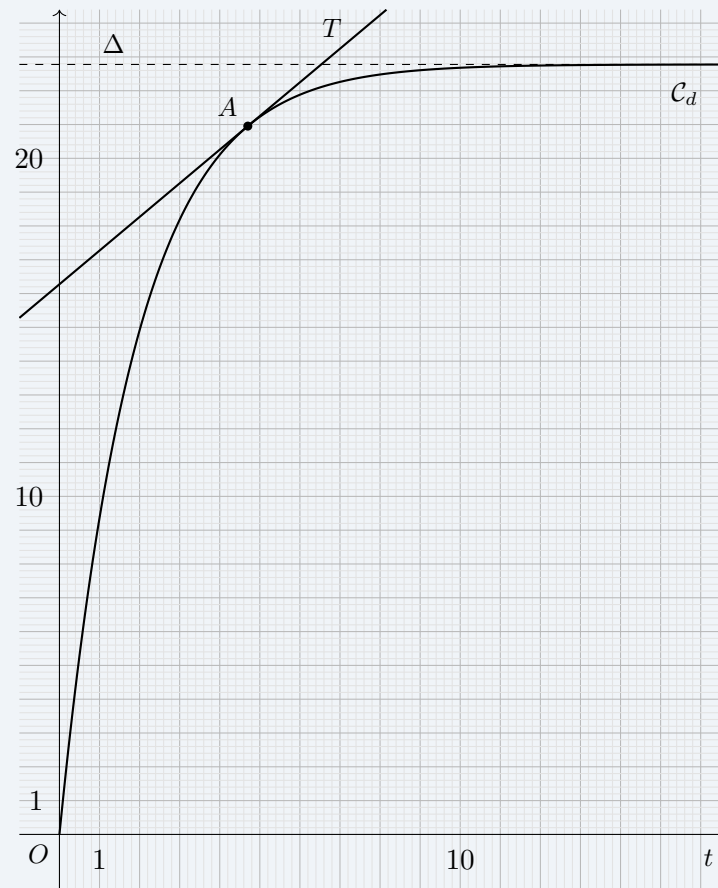


Fig. 2

Dans cette partie, aucune justification n'est attendue.

Avec la précision que permet le graphique, répondre aux questions ci-dessous.

D'après ce modèle :

1. Au bout de combien de temps le chariot aura-t-il parcouru 15 m dans la zone de freinage ?
2. Quelle longueur minimale doit-être prévue pour la zone de freinage ?
3. Que vaut $d'(4,7)$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B On rappelle que t désigne le temps écoulé, en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde (m.s^{-1}), en fonction de t , par une fonction v définie sur $[0; +\infty[$.

On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée ;
- la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,6y = e^{-0,6t},$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y .

On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 m.s^{-1} , c'est-à-dire $v(0) = 12$.

1.a. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + 0,6y = 0$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0; +\infty[$.

1.b. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = t e^{-0,6t}$.

Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).

1.c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0; +\infty[$.

1.d. En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$v(t) = (12 + t) e^{-0,6t}.$$

2. Dans cette question, on étudie la fonction v sur $[0; +\infty[$.

2.a. Montrer que pour tout réel $t \in [0; +\infty[$, $v'(t) = (-6,2 - 0,6t) e^{-0,6t}$.

2.b. En admettant que :

$$v(t) = 12 e^{-0,6t} + \frac{1}{0,6} \times \frac{0,6t}{e^{0,6t}},$$

déterminer la limite de v en $+\infty$.

2.c. Étudier le sens de variation de la fonction v et dresser son tableau de variation complet. Justifier.

2.d. Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une solution unique α , dont on donnera une valeur approchée au dixième.

3. Lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde, un système mécanique se déclenche permettant son arrêt complet. Déterminer au bout de combien de temps ce système entre en action. Justifier.

Partie C On rappelle que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$v(t) = (12 + t) e^{-0,6t}.$$

On admet que pour tout réel t dans l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$d(t) = \int_0^t v(x) dx.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la distance parcourue par le chariot entre les instants 0 et t est donnée par :

$$d(t) = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}.$$

2. On rappelle que le dispositif d'arrêt se déclenche lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde. Déterminer, selon ce modèle, une valeur approchée au centième de la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage avant le déclenchement de ce dispositif.

Corrigé

Partie A Lectures graphiques (aucune justification n'est attendue) ; le quadrillage fin est gradué de 0,2 en 0,2.

1. On cherche l'abscisse du point de $\mathcal{C}_d$ d'ordonnée 15. L'horizontale $y = 15$ coupe la courbe au point d'abscisse 2 environ : le chariot a parcouru 15 m au bout d'environ 2 secondes.

2. La distance parcourue $d(t)$ augmente avec t et se rapproche, sans la dépasser, de l'asymptote horizontale Δ , dont l'ordonnée se lit à environ 22,8. La distance totale parcourue dans la zone de freinage reste donc inférieure à 22,8 m : il faut prévoir une zone de freinage d'une longueur minimale d'environ 23 m.

3. Le nombre dérivé $d'(4,7)$ est le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}_d$ au point A

d'abscisse 4,7. Sur le graphique, T passe par le point $A(4,7; 21)$ et coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 16,3 environ ; elle atteint l'ordonnée 24,3 environ pour l'abscisse 8. Son coefficient directeur vaut donc environ

$$d'(4,7) \approx \frac{24,3 - 16,3}{8 - 0} = 1.$$

On peut aussi n'utiliser que le point A et l'ordonnée à l'origine : $\frac{21 - 16,3}{4,7 - 0} = \frac{4,7}{4,7} = 1$. Ainsi $d'(4,7) \approx 1$.

Interprétation : d étant la distance parcourue, sa dérivée d' est la vitesse instantanée du chariot. À l'instant $t = 4,7$ s, le chariot roule à environ 1 m.s⁻¹.

Partie B 1.a. L'équation (E') s'écrit $y' = -0,6y$: c'est une équation de la forme $y' = ay$ avec $a = -0,6$. D'après le cours, ses solutions sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions

$$t \mapsto C e^{-0,6t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.b. La fonction $g : t \mapsto t e^{-0,6t}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables, et, avec $(uw)' = u'w + uw'$ et $(e^{-0,6t})' = -0,6 e^{-0,6t}$:

$$g'(t) = 1 \times e^{-0,6t} + t \times (-0,6) e^{-0,6t} = (1 - 0,6t) e^{-0,6t}.$$

Alors, pour tout $t \geq 0$:

$$g'(t) + 0,6 g(t) = (1 - 0,6t) e^{-0,6t} + 0,6t e^{-0,6t} = (1 - 0,6t + 0,6t) e^{-0,6t} = e^{-0,6t}.$$

La fonction g vérifie (E) : c'est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

1.c. Soit f une fonction dérivable sur $[0; +\infty[$. Par linéarité de la dérivation,

$$(f - g)' + 0,6(f - g) = (f' + 0,6f) - (g' + 0,6g) = (f' + 0,6f) - e^{-0,6t}.$$

Ainsi f est solution de (E) si et seulement si $f' + 0,6f = e^{-0,6t}$, c'est-à-dire si et seulement si $(f - g)' + 0,6(f - g) = 0$, autrement dit si et seulement si $f - g$ est solution de (E'). D'après **1.a**, cela équivaut à l'existence d'un réel C tel que $f - g = C e^{-0,6t}$. Les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont donc les fonctions

$$t \mapsto t e^{-0,6t} + C e^{-0,6t} = (t + C) e^{-0,6t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Solution générale de (E) = solution particulière + solution générale de l'équation homogène (E').)

1.d. La fonction v est solution de (E) : il existe un réel C tel que, pour tout $t \geq 0$, $v(t) = (t + C) e^{-0,6t}$. La condition initiale $v(0) = 12$ donne $(0 + C) e^0 = C = 12$. Par conséquent, pour tout $t \in [0; +\infty[$,

$$v(t) = (12 + t) e^{-0,6t}.$$

2.a. La fonction v est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit de $t \mapsto 12 + t$ (dérivée 1) et de $t \mapsto e^{-0,6t}$ (dérivée $-0,6 e^{-0,6t}$) :

$$v'(t) = 1 \times e^{-0,6t} + (12 + t) \times (-0,6) e^{-0,6t} = (1 - 7,2 - 0,6t) e^{-0,6t} = (-6,2 - 0,6t) e^{-0,6t}.$$

(On peut aussi utiliser (E) : $v' = e^{-0,6t} - 0,6v = e^{-0,6t} - 0,6(12 + t) e^{-0,6t}$, ce qui redonne le même résultat.)

2.b. L'écriture admise est bien égale à $v(t)$, puisque $\frac{1}{0,6} \times \frac{0,6t}{e^{0,6t}} = t e^{-0,6t}$. Étudions chaque terme quand $t \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} - \lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,6t) &= -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0, \text{ donc, par composition, } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,6t} = 0 \text{ et} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} 12 e^{-0,6t} &= 0; \end{aligned}$$

— posons $X = 0,6t$; quand $t \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$ et $\frac{0,6t}{e^{0,6t}} = \frac{X}{e^X}$. Par croissances comparées, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ et, par composition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0,6t}{e^{0,6t}} = 0$; le produit par la constante $\frac{1}{0,6}$ tend aussi vers 0.

Par somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$: la vitesse du chariot tend vers 0, ce qui est cohérent avec un freinage.

Ce que le correcteur attend : l'écriture directe $(12+t)e^{-0,6t}$ est une forme indéterminée « $\infty \times 0$ » ; c'est l'écriture admise, avec la croissance comparée de X et e^X , qui lève l'indétermination.

2.c. Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,6t} > 0$: le signe de $v'(t)$ est celui de $-6,2 - 0,6t$. Or, pour $t \geq 0$, $-0,6t \leq 0$ donc $-6,2 - 0,6t \leq -6,2 < 0$. Ainsi $v'(t) < 0$ sur $[0; +\infty[$ et la fonction v est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. Avec $v(0) = 12e^0 = 12$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$:

t	0		$+\infty$
$v'(t)$		—	
$v(t)$	12	$\searrow$	0

La valeur 0 à droite est une limite, non atteinte : la vitesse reste strictement positive.

2.d. Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction v est continue (car dérivable) et strictement décroissante, avec $v(0) = 12$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$. Comme $0 < 1 < 12$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection, étendu à l'intervalle non borné $[0; +\infty[$ en remplaçant la valeur en la borne infinie par la limite) assure que l'équation $v(t) = 1$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$.

Valeur approchée. À la calculatrice,

$$v(4) = 16e^{-2,4} \approx 1,45 > 1 \quad \text{et} \quad v(5) = 17e^{-3} \approx 0,85 < 1,$$

donc, v étant strictement décroissante, $4 < \alpha < 5$. En affinant :

$$v(4,6) = 16,6e^{-2,76} \approx 1,051 > 1 \quad \text{et} \quad v(4,7) = 16,7e^{-2,82} \approx 0,995 < 1,$$

d'où $4,6 < \alpha < 4,7$; enfin $v(4,65) = 16,65e^{-2,79} \approx 1,023 > 1$, donc $4,65 < \alpha < 4,7$ et $\alpha \approx 4,7$ au dixième. Une valeur plus précise est $\alpha \approx 4,69$.

3. Le système d'arrêt se déclenche dès que $v(t) \leq 1$. La fonction v étant strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ avec $v(\alpha) = 1$:

$$v(t) \leq 1 \iff v(t) \leq v(\alpha) \iff t \geq \alpha.$$

La vitesse est strictement supérieure à 1 m.s^{-1} pour $t < \alpha$, et inférieure ou égale à 1 m.s^{-1} à partir de l'instant α . Le système mécanique entre donc en action au bout de $\alpha \approx 4,7$ secondes (environ 4,69 s) après l'entrée dans la zone de freinage. On retrouve la lecture graphique $d'(4,7) \approx 1$ de la partie A.

Ce que le correcteur attend : le passage de « $v(t) \leq 1$ » à « $t \geq \alpha$ » se justifie par la stricte décroissance de v ; c'est ce qui garantit que le dispositif ne se déclenche pas avant α et se déclenche à partir de α .

Partie C 1. On a $d(t) = \int_0^t (12+x)e^{-0,6x} dx$. Pour appliquer la formule d'intégration par parties $\int_0^t u'(x)w(x) dx = [u(x)w(x)]_0^t - \int_0^t u(x)w'(x) dx$, posons :

$$\begin{cases} u'(x) = e^{-0,6x} & \implies u(x) = -\frac{1}{0,6} e^{-0,6x} = -\frac{5}{3} e^{-0,6x}, \\ w(x) = 12+x & \implies w'(x) = 1. \end{cases}$$

Les fonctions u et w sont dérivables sur $[0; t]$ et leurs dérivées y sont continues. Par intégration par parties :

$$d(t) = \left[-\frac{5}{3}(12+x)e^{-0,6x} \right]_0^t - \int_0^t \left(-\frac{5}{3}e^{-0,6x} \right) \times 1 \, dx = \left[-\frac{5}{3}(12+x)e^{-0,6x} \right]_0^t + \frac{5}{3} \int_0^t e^{-0,6x} \, dx.$$

Le crochet vaut

$$\left[-\frac{5}{3}(12+x)e^{-0,6x} \right]_0^t = -\frac{5}{3}(12+t)e^{-0,6t} + \frac{5}{3} \times 12 \times e^0 = -\frac{5}{3}(12+t)e^{-0,6t} + 20,$$

et, une primitive de $x \mapsto e^{-0,6x}$ étant $x \mapsto -\frac{5}{3}e^{-0,6x}$,

$$\frac{5}{3} \int_0^t e^{-0,6x} \, dx = \frac{5}{3} \left[-\frac{5}{3}e^{-0,6x} \right]_0^t = \frac{5}{3} \left(-\frac{5}{3}e^{-0,6t} + \frac{5}{3} \right) = -\frac{25}{9}e^{-0,6t} + \frac{25}{9}.$$

En regroupant, et avec $\frac{5}{3} \times 12 = 20 = \frac{180}{9}$:

$$d(t) = e^{-0,6t} \left(-20 - \frac{5}{3}t - \frac{25}{9} \right) + 20 + \frac{25}{9} = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}.$$

C'est bien l'expression annoncée. *Contrôle* : $d(0) = -\frac{205}{9} + \frac{205}{9} = 0$, conformément à l'énoncé,

et $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = \frac{205}{9} \approx 22,78$ (par croissances comparées, $t e^{-0,6t} \rightarrow 0$) : on retrouve l'asymptote Δ lue à 22,8 en partie A, et la longueur minimale de 23 m.

Ce que le correcteur attend : le choix « on dérive $12+x$, on primitive l'exponentielle » (l'autre choix ne simplifie rien), le signe du crochet et la constante $\frac{5}{3} \times 12 = 20$ qu'il ne faut pas oublier lorsqu'on évalue en 0.

2. Le dispositif se déclenche à l'instant α (question **B.3**), où $v(\alpha) = 1$. La distance parcourue avant ce déclenchement est $d(\alpha)$. Comme $v(\alpha) = (12+\alpha)e^{-0,6\alpha} = 1$, on a $e^{-0,6\alpha} = \frac{1}{12+\alpha}$, ce qui permet d'écrire

$$d(\alpha) = \frac{205}{9} - \frac{\frac{5}{3}\alpha + \frac{205}{9}}{12+\alpha}.$$

Avec la valeur précise $\alpha \approx 4,6915$:

$$d(\alpha) \approx \frac{205}{9} - \frac{7,819 + 22,778}{16,6915} \approx 22,778 - 1,833 \approx 20,945,$$

soit $d(\alpha) \approx 20,94$ m. En utilisant directement la valeur arrondie $\alpha \approx 4,7$ dans l'expression de d :

$$d(4,7) = e^{-2,82} \left(-\frac{5}{3} \times 4,7 - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9} \approx 0,0596 \times (-30,61) + 22,778 \approx 20,95.$$

Selon ce modèle, le chariot parcourt donc environ 20,9 m dans la zone de freinage avant le déclenchement du dispositif d'arrêt : 20,94 m avec la valeur précise de α , 20,95 m avec $\alpha \approx 4,7$. On retrouve l'ordonnée du point A (environ 21) lue sur la figure.

Ce que le correcteur attend : identifier que la distance cherchée est $d(\alpha)$ et non $d(1)$ (le seuil 1 porte sur la vitesse, pas sur le temps) ; la deuxième décimale dépend de la précision retenue pour α , et le correcteur accepte 20,95 obtenu avec $\alpha \approx 4,7$.