

Mathématiques

Baccalauréat général 2026 — épreuve de spécialité

Amérique du Nord, session 2026 (26-MATJ1AN1)

Corrigé

Quatre exercices

Exercice 1

Sujet — Exercice 1 — 6 points

Une plateforme de diffusion musicale propose trois types d'abonnements : « Étudiant », « Classique » et « Famille ». Elle propose également une option « Écoute hors-ligne » qu'on peut activer pour chaque type d'abonnement et qui permet de télécharger de la musique.

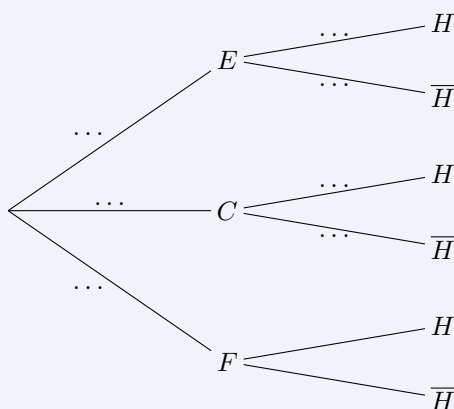
Une étude statistique menée sur les abonnés a permis d'établir que :

- 25 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et 15 % ont choisi l'abonnement « Famille » ;
- 45 % des abonnés « Étudiant » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 30 % des abonnés « Classique » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 12 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et ont activé l'option « Écoute hors-ligne ».

On prélève au hasard le profil d'un abonné et on considère les événements suivants :

- E : l'abonné a choisi l'abonnement « Étudiant » ;
- C : l'abonné a choisi l'abonnement « Classique » ;
- F : l'abonné a choisi l'abonnement « Famille » ;
- H : l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ».

Partie A 1. Recopier l'arbre de probabilités suivant, en complétant les pointillés :



2. Calculer la valeur exacte de $P(E \cap H)$.

3. Démontrer que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

4. Un abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ». Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement « Étudiant ». On arrondira le résultat au millièmes.

Partie B On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ». On arrondira le résultat au millième.

3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

On s'intéresse à un échantillon de n abonnés, qu'on assimile à un tirage avec remise. On note q_n la probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».

3.a. Démontrer que, pour tout n entier naturel non nul, $q_n = 1 - 0,5875^n$.

3.b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9 %.

Partie C La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

- abonnement « Étudiant » : 5 euros par mois ;
- abonnement « Classique » : 10 euros par mois ;
- abonnement « Famille » : 16 euros par mois ;
- option « Écoute hors-ligne » : 2 euros de plus par mois quel que soit l'abonnement choisi.

On note Y la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné.

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y .

2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .

3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y vaut 10,475 et interpréter ce résultat dans le contexte.

4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire Y , arrondie au centième.

5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo. On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.

5.a. Calculer la variance de la variable aléatoire Z .

5.b. Un responsable affirme que si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50 % de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros. Justifier cette affirmation.

Corrigé

Partie A 1. Les trois événements E , C et F forment une partition de l'univers : un abonné choisit exactement un des trois abonnements. La somme des probabilités des trois branches issues du premier nœud vaut donc 1, d'où

$$P(C) = 1 - P(E) - P(F) = 1 - 0,25 - 0,15 = 0,60.$$

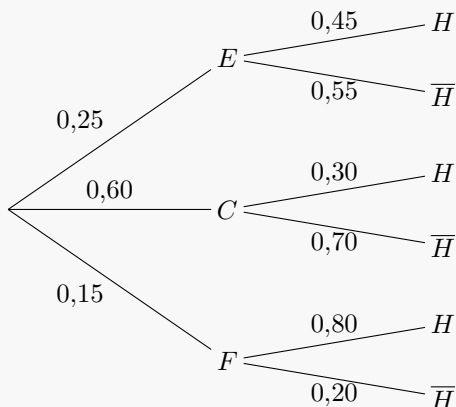
Les pourcentages « 45 % des abonnés *Étudiant* » et « 30 % des abonnés *Classique* » sont des probabilités *conditionnelles* : $P_E(H) = 0,45$ et $P_C(H) = 0,30$, d'où $P_E(\bar{H}) = 0,55$ et $P_C(\bar{H}) = 0,70$.

En revanche, « 12 % des abonnés ont choisi *Famille* et ont activé l'option » est la probabilité d'une intersection : $P(F \cap H) = 0,12$. Comme $P(F) = 0,15 \neq 0$, la définition de la probabilité

conditionnelle donne

$$P_F(H) = \frac{P(F \cap H)}{P(F)} = \frac{0,12}{0,15} = \frac{12}{15} = 0,80, \quad P_F(\bar{H}) = 1 - 0,80 = 0,20.$$

L'arbre complété est le suivant :



Ce que le correcteur attend : distinguer les données conditionnelles (« parmi les abonnés Étudiant ») des données d'intersection (« ont choisi Famille **et** ont activé »); la valeur 0,12 ne se place pas sur une branche, elle sert à la calculer.

2. La probabilité d'un chemin de l'arbre est le produit des probabilités des branches qui le composent :

$$P(E \cap H) = P(E) \times P_E(H) = 0,25 \times 0,45 = 0,1125 = \frac{9}{80}.$$

3. Les événements E , C et F forment une partition de l'univers, et ils sont tous de probabilité non nulle. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(H) = P(E \cap H) + P(C \cap H) + P(F \cap H).$$

Or $P(C \cap H) = P(C) \times P_C(H) = 0,60 \times 0,30 = 0,18$ et $P(F \cap H) = 0,12$ est donné par l'énoncé. Donc

$$P(H) = 0,1125 + 0,18 + 0,12 = 0,4125.$$

La probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est bien 0,4125.

4. On sait que l'abonné a activé l'option : on cherche la probabilité conditionnelle $P_H(E)$. Comme $P(H) = 0,4125 \neq 0$:

$$P_H(E) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0,1125}{0,4125} = \frac{1125}{4125} = \frac{3}{11} \approx 0,272727 \dots$$

Arrondie au millième, cette probabilité vaut 0,273.

Ce que le correcteur attend : ne pas confondre $P_H(E)$ avec $P_E(H) = 0,45$ lu sur l'arbre : l'arbre donne les probabilités « sachant l'abonnement », la question demande la probabilité « sachant l'option ».

Partie B **1.** On répète 8 fois, de façon identique et indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise), une épreuve de Bernoulli dont le succès est « l'abonné a activé l'option », de probabilité 0,4125. La variable X compte le nombre de succès : elle suit la loi binomiale de paramètres

$$n = 8 \quad \text{et} \quad p = 0,4125, \quad \text{c'est-à-dire } X \sim \mathcal{B}(8; 0,4125).$$

2. « Aucun des huit abonnés n'a activé l'option » est l'événement $\{X = 0\}$. D'après la formule de la loi binomiale, avec $\binom{8}{0} = 1$:

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} \times 0,4125^0 \times (1 - 0,4125)^8 = 0,5875^8 \approx 0,014193.$$

Arrondie au millième, cette probabilité vaut 0,014.

3.a. Pour un échantillon de n abonnés, notons X_n le nombre d'abonnés ayant activé l'option : pour la même raison qu'à la question 1, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,4125)$. L'événement « au moins un abonné a activé l'option » est l'événement contraire de « aucun abonné n'a activé l'option », donc

$$q_n = P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,4125^0 \times (1 - 0,4125)^n = 1 - 0,5875^n.$$

3.b. On cherche le plus petit entier naturel non nul n tel que $q_n \geq 0,999$:

$$1 - 0,5875^n \geq 0,999 \iff 0,5875^n \leq 0,001.$$

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et les deux membres sont strictement positifs; l'inégalité équivaut donc à $\ln(0,5875^n) \leq \ln(0,001)$, c'est-à-dire $n \ln(0,5875) \leq \ln(0,001)$. Comme $0 < 0,5875 < 1$, on a $\ln(0,5875) < 0$: en divisant par ce nombre négatif, le sens de l'inégalité change :

$$n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5875)} \approx \frac{-6,9078}{-0,5319} \approx 12,99.$$

Le plus petit entier qui convient est donc $n = 13$. On le contrôle : $q_{12} = 1 - 0,5875^{12} \approx 0,99831 < 0,999$ tandis que $q_{13} = 1 - 0,5875^{13} \approx 0,99901 \geq 0,999$.

Ce que le correcteur attend : le changement de sens de l'inégalité lors de la division par $\ln(0,5875) < 0$, et une conclusion entière (le quotient 12,99 n'est pas la réponse : il faut l'entier immédiatement supérieur).

Partie C 1. Le montant payé est celui de l'abonnement, augmenté de 2 euros si l'option est activée. Les six valeurs possibles de Y sont donc

$$5; \quad 7; \quad 10; \quad 12; \quad 16; \quad 18.$$

2. Chaque valeur correspond à un unique chemin de l'arbre de la partie A :

$$\begin{aligned} P(Y = 5) &= P(E \cap \overline{H}) = 0,25 \times 0,55 = 0,1375, & P(Y = 7) &= P(E \cap H) = 0,1125, \\ P(Y = 10) &= P(C \cap \overline{H}) = 0,60 \times 0,70 = 0,42, & P(Y = 12) &= P(C \cap H) = 0,18, \\ P(Y = 16) &= P(F \cap \overline{H}) = 0,15 \times 0,20 = 0,03, & P(Y = 18) &= P(F \cap H) = 0,12. \end{aligned}$$

D'où la loi de probabilité de Y :

y_i	5	7	10	12	16	18
$P(Y = y_i)$	0,1375	0,1125	0,42	0,18	0,03	0,12

La somme de ces six probabilités vaut 1, ce qui confirme qu'aucun cas n'a été oublié.

3. L'espérance est la somme des valeurs pondérées par leurs probabilités :

$$\begin{aligned} E(Y) &= 5 \times 0,1375 + 7 \times 0,1125 + 10 \times 0,42 + 12 \times 0,18 + 16 \times 0,03 + 18 \times 0,12 \\ &= 0,6875 + 0,7875 + 4,2 + 2,16 + 0,48 + 2,16 = 10,475. \end{aligned}$$

Interprétation : sur un très grand nombre d'abonnés choisis au hasard, le montant moyen payé chaque mois par un abonné est d'environ 10,475 euros. Autrement dit, la plateforme encaisse en moyenne 10,475 euros par abonné et par mois.

4. La calculatrice donne $V(Y) = 13,704375$, soit $V(Y) \approx 13,70$ au centième. On le retrouve avec la formule $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 25 \times 0,1375 + 49 \times 0,1125 + 100 \times 0,42 + 144 \times 0,18 + 256 \times 0,03 + 324 \times 0,12 \\ &= 3,4375 + 5,5125 + 42 + 25,92 + 7,68 + 38,88 = 123,43, \end{aligned}$$

puis $V(Y) = 123,43 - 10,475^2 = 123,43 - 109,725625 = 13,704375$.

5.a. La variance est le carré de l'écart-type :

$$V(Z) = (\sigma(Z))^2 = 2^2 = 4.$$

5.b. L'intervalle $]6; 12[$ est centré en $9 = E(Z)$, à une distance 3 de chaque côté :

$$6 < Z < 12 \iff -3 < Z - 9 < 3 \iff |Z - E(Z)| < 3.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliquée à la variable Z d'espérance 9 et de variance 4 avec $\varepsilon = 3 > 0$, donne

$$P(|Z - 9| \geq 3) \leq \frac{V(Z)}{3^2} = \frac{4}{9}.$$

En passant à l'événement contraire :

$$P(6 < Z < 12) = P(|Z - 9| < 3) = 1 - P(|Z - 9| \geq 3) \geq 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \approx 0,556.$$

Comme $\frac{5}{9} \approx 0,556 \geq 0,5$, la probabilité que le prix de l'abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros est d'au moins 50 % : l'affirmation du responsable est justifiée.

Ce que le correcteur attend : le passage explicite de l'événement $\{6 < Z < 12\}$ à son contraire $\{|Z - 9| \geq 3\}$ avant d'appliquer l'inégalité, et le fait que celle-ci ne suppose rien de la loi de Z — seulement l'existence d'une espérance et d'une variance.

Exercice 2

Sujet — Exercice 2 — 4 points

La perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie dans cet exercice deux modèles d'évolution de la population de perches-soleil dans un étang naturel. On estime que, dans cet étang, le nombre de perches-soleil s'élève à 4 000 individus au 1^{er} janvier 2025.

Partie A : étude d'un modèle discret Dans cette partie, on modélise le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite (u_n) . Pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n .

La suite (u_n) est définie par :

- $u_0 = 4$;
- pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}$.

On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier pour tout entier n , $u_n > 0$.

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1^{er} janvier 2026 donné par ce modèle.

2. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = 4 - \frac{4}{x}$.

2.a. Justifier que la fonction h est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2.b. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$

2.c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

2.d. Justifier que $\ell = 2$.

2.e. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

3. On considère le script Python ci-dessous.

3.a. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]2; 4[$. Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$.

```
1 def population(s) :  
2     u = 4  
3     n = 0  
4     while ... :  
5         u = ...  
6         n = ...  
7     return n
```

3.b. Quelle valeur renvoie la commande `population(2.2)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu On note t le temps écoulé, exprimé en année, à partir du 1^{er} janvier 2025. L'évolution du nombre de perches-soleil, exprimé en millier, est modélisée par la fonction p telle que :

- la fonction p est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$;
- $p(0) = 4$;
- la fonction p est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2$, où y est une fonction de la variable réelle t .

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).
2. En déduire que l'expression de la fonction p sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est $p(t) = 2e^{-t} + 2$.
3. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

Corrigé

Partie A : étude d'un modèle discret 1. Le 1^{er} janvier 2026 correspond à $n = 1$:

$$u_1 = 4 - \frac{4}{u_0} = 4 - \frac{4}{4} = 4 - 1 = 3.$$

Les termes de la suite sont exprimés en milliers d'individus : ce modèle prévoit donc 3 000 perches-soleil au 1^{er} janvier 2026.

2.a. La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme d'une constante et du quotient $x \mapsto -\frac{4}{x}$, dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = 0 - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2}.$$

Comme $x^2 > 0$, on a $h'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$: la fonction h est strictement croissante sur cet intervalle.

2.b. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ » et raisonnons par récurrence.

Initialisation. On a $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$, donc $2 \leq 3 \leq 4 \leq 4$: la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$. Tous ces nombres appartiennent à $]0; +\infty[$, intervalle sur lequel h est croissante (question 2.a) : appliquer h à un encadrement en conserve donc l'ordre. On obtient

$$h(2) \leq h(u_{n+1}) \leq h(u_n) \leq h(4).$$

Or, par définition de la suite, $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(u_{n+1}) = u_{n+2}$, tandis que

$$h(2) = 4 - \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad h(4) = 4 - \frac{4}{4} = 3.$$

Ainsi $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3 \leq 4$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.

Ce que le correcteur attend : c'est la *croissance* de h qui permet d'appliquer h à l'encadrement sans en changer le sens ; avec une fonction décroissante, l'ordre s'inverserait.

2.c. L'encadrement précédent donne, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$: la suite (u_n) est décroissante. Il donne aussi $u_{n+1} \geq 2$ pour tout n , et $u_0 = 4 \geq 2$: la suite est minorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone, toute suite décroissante et minorée est convergente : la suite (u_n) converge vers un réel ℓ .

2.d. La suite (u_n) converge vers ℓ , donc la suite (u_{n+1}) , qui n'est que la suite (u_n) privée de son premier terme, converge aussi vers ℓ . Par passage à la limite dans l'encadrement $2 \leq u_n \leq 4$,

on obtient d'abord $2 \leq \ell \leq 4$; en particulier $\ell \neq 0$, donc $\frac{4}{u_n}$ converge vers $\frac{4}{\ell}$. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}$:

$$\ell = 4 - \frac{4}{\ell}.$$

Comme $\ell \geq 2 > 0$, on peut multiplier les deux membres par ℓ :

$$\ell^2 = 4\ell - 4 \iff \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \iff (\ell - 2)^2 = 0 \iff \ell = 2.$$

La limite de la suite (u_n) est donc $\ell = 2$.

Ce que le correcteur attend : la justification $\ell \neq 0$ avant de passer à la limite dans le quotient $\frac{4}{u_n}$ — c'est l'encadrement de la question 2.b qui la fournit.

2.e. La suite converge vers 2, c'est-à-dire vers 2 000 individus, et elle est décroissante mais toujours supérieure ou égale à 2. La population diminue donc, mais se stabilise autour de 2 000 perches-soleil : ce modèle ne prévoit **pas** une élimination à long terme de l'espèce envahissante.

3.a. Le script doit s'arrêter dès que $u_n < s$: on poursuit la boucle tant que $u \geq s$. À chaque tour, on remplace u par le terme suivant et on augmente le compteur de 1 :

```

1  def population(s) :
2      u = 4
3      n = 0
4      while u >= s :
5          u = 4 - 4/u
6          n = n + 1
7      return n

```

À l'entrée de la boucle, la variable u contient u_n où n est la valeur du compteur : cet invariant est vrai au départ ($u_0 = 4, n = 0$) et se conserve à chaque tour. La boucle se termine (la suite décroît vers $2 < s$), et à la sortie $u = u_n < s$ alors que tous les termes précédents étaient supérieurs ou égaux à s : la fonction renvoie bien le plus petit entier n tel que $u_n < s$.

3.b. Calculons les termes successifs sous forme exacte :

$$u_0 = 4, \quad u_1 = 3, \quad u_2 = \frac{8}{3}, \quad u_3 = \frac{5}{2}, \quad u_4 = \frac{12}{5}, \quad u_5 = \frac{7}{3}, \quad u_6 = \frac{16}{7}, \quad u_7 = \frac{9}{4},$$

$$u_8 = \frac{20}{9} \approx 2,222, \quad u_9 = \frac{11}{5} = 2,2, \quad u_{10} = 4 - \frac{4}{11/5} = 4 - \frac{20}{11} = \frac{24}{11} \approx 2,1818.$$

Le terme u_9 vaut *exactement* 2,2 : l'inégalité stricte $u_9 < 2,2$ est fausse, le rang 9 ne convient donc pas. En revanche $u_{10} = \frac{24}{11} < 2,2$. La commande `population(2.2)` renvoie donc 10.

Interprétation : d'après ce modèle, c'est au 1^{er} janvier 2025 + 10 = 2035 que le nombre de perches-soleil de l'étang devient, pour la première fois, strictement inférieur à 2 200 individus. *Ce que le correcteur attend* : l'inégalité de la boucle est *large* (`u >= s`) parce que la condition cherchée, $u_n < s$, est stricte ; c'est exactement ce qui fait passer la réponse de 9 à 10.

Partie B : étude d'un modèle continu 1. L'équation (E) s'écrit $y' = -y + 2$, soit $y' = ay + b$ avec $a = -1$ et $b = 2$. Comme $a \neq 0$, la fonction constante égale à $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{-1} = 2$ en est une solution particulière, et les solutions de l'équation homogène $y' = -y$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$. D'après le théorème de résolution de $y' = ay + b$, l'ensemble des solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ est l'ensemble des fonctions

$$t \longmapsto Ce^{-t} + 2, \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

2. La fonction p est solution de (E) : il existe donc un réel C tel que $p(t) = Ce^{-t} + 2$ pour tout $t \geq 0$. La condition initiale $p(0) = 4$ détermine C :

$$p(0) = Ce^0 + 2 = C + 2 = 4 \iff C = 2.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0; +\infty[: p(t) = 2e^{-t} + 2$.

3. On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-t) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$, puis

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 2 \times 0 + 2 = 2.$$

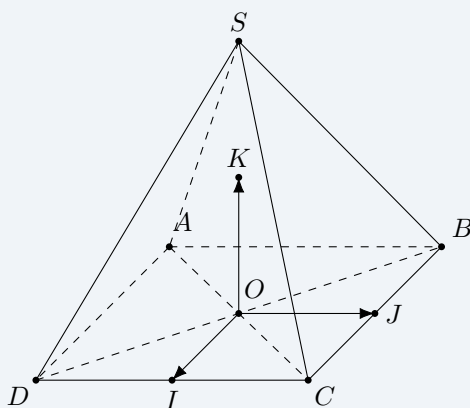
De plus $e^{-t} > 0$ pour tout t , donc $p(t) > 2$: la population décroît vers 2 milliers d'individus sans jamais l'atteindre. Comme le modèle discret, ce modèle continu prévoit une stabilisation autour de 2 000 perches-soleil, et donc **pas** d'élimination à long terme de l'espèce envahissante.

Exercice 3

Sujet — Exercice 3 — 5 points

Dans cet exercice l'unité est le cm.

On considère une pyramide à base carrée $SABCD$ comme dans la figure ci-dessous.



Dans cette figure :

- $AB = BC = CD = DA = OS = 2$ cm ;
- I est le milieu de $[CD]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[OS]$.

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$.

On admet que $B(-1; 1; 0)$, $C(1; 1; 0)$ et $S(0; 0; 2)$.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A 1. Donner les coordonnées des points A et D .

2. Calculer le produit scalaire $\vec{SC} \cdot \vec{SB}$.

3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BSC}$ arrondie au dixième de degré près.

Partie B On se propose dans cette partie de déterminer la distance du point O au plan (SBC) .

1. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.a. Justifier que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (SBC) .

1.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (SBC) est $2y + z - 2 = 0$.

2. On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC) .

2.a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (OH) est

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2.b. Calculer les coordonnées du point H .

2.c. En déduire que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Partie C On se propose ici de retrouver le résultat de la partie B par une autre méthode.

1. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

1.a. Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.

1.b. En déduire que le volume de la pyramide $OCBS$ est égal à $\frac{2}{3}$ cm³.

2. Déterminer l'aire du triangle SBC .

3. Déduire des questions précédentes que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Corrigé

Partie A **1.** Le repère est $(O; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$: par définition d'un repère, les extrémités des trois vecteurs de base ont pour coordonnées $I(1; 0; 0)$, $J(0; 1; 0)$ et $K(0; 0; 1)$.

Or I est le milieu de $[CD]$, donc chaque coordonnée de I est la demi-somme des coordonnées correspondantes de C et de D ; on en tire celles de D :

$$x_D = 2x_I - x_C = 2 \times 1 - 1 = 1, \quad y_D = 2y_I - y_C = 2 \times 0 - 1 = -1, \quad z_D = 2z_I - z_C = 0,$$

c'est-à-dire $D(1; -1; 0)$. Enfin $ABCD$ est un carré, donc $\vec{AD} = \vec{BC}$, et $\vec{BC}$ a pour coordonnées $(1 - (-1); 1 - 1; 0) = (2; 0; 0)$; les coordonnées de A s'obtiennent en retranchant celles de $\vec{BC}$ à celles de D :

$$A(1 - 2; -1 - 0; 0 - 0), \quad \text{c'est-à-dire} \quad A(-1; -1; 0).$$

Contrôle : le milieu de $[BC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{-1+1}{2}; \frac{1+1}{2}; 0\right) = (0; 1; 0)$, c'est bien le point J ; $DA = \sqrt{(-1-1)^2 + 0^2 + 0^2} = 2$ cm, comme annoncé; et O est le milieu commun des diagonales $[AC]$ et $[BD]$, c'est-à-dire le centre du carré, conformément à la figure.

2. On calcule d'abord les coordonnées des deux vecteurs, en soustrayant les coordonnées de l'origine S :

$$\vec{SC} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{SB} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le repère étant orthonormé, le produit scalaire s'obtient à partir des coordonnées :

$$\vec{SC} \cdot \vec{SB} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-2) \times (-2) = -1 + 1 + 4 = 4.$$

3. L'angle $\widehat{BSC}$ a pour sommet S et pour côtés $[SB]$ et $[SC]$. D'après l'expression du produit scalaire avec l'angle :

$$\vec{SC} \cdot \vec{SB} = \|\vec{SC}\| \times \|\vec{SB}\| \times \cos(\widehat{BSC}).$$

Or, dans le repère orthonormé,

$$\|\vec{SC}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}, \quad \|\vec{SB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

Ces deux normes sont non nulles, donc

$$\cos(\widehat{BSC}) = \frac{4}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

L'angle géométrique $\widehat{BSC}$ appartient à $[0; 180^\circ]$, intervalle sur lequel le cosinus est strictement décroissant : il est donc déterminé de façon unique. À la calculatrice (en mode degré),

$$\widehat{BSC} = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48,1897^\circ,$$

soit $\widehat{BSC} \approx 48,2^\circ$ au dixième de degré près.

Partie B 1.a. Le vecteur $\vec{n}$ n'est pas nul. Les points S , B et C ne sont pas alignés, donc ils définissent bien un plan, dirigé par les deux vecteurs

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 1 - 1 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{BS} = \begin{pmatrix} 0 - (-1) \\ 0 - 1 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : s'il existait un réel k tel que $\vec{BS} = k\vec{BC}$, la troisième coordonnée donnerait $2 = k \times 0 = 0$, ce qui est impossible. On calcule alors les produits scalaires :

$$\vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \times 2 + 2 \times 0 + 1 \times 0 = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{BS} = 0 \times 1 + 2 \times (-1) + 1 \times 2 = -2 + 2 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$, non nul, est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (SBC) : il est orthogonal à tout vecteur directeur de ce plan, c'est-à-dire normal au plan (SBC) .

1.b. Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Ici $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$: le plan (SBC) a une équation de la forme

$$2y + z + d = 0.$$

Le point $C(1; 1; 0)$ appartient à ce plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation : $2 \times 1 + 0 + d = 0$, d'où $d = -2$. Une équation cartésienne du plan (SBC) est donc

$$2y + z - 2 = 0.$$

Contrôle par les deux autres points : pour $B(-1; 1; 0)$, $2 \times 1 + 0 - 2 = 0$; pour $S(0; 0; 2)$, $2 \times 0 + 2 - 2 = 0$. Les trois points appartiennent bien au plan d'équation trouvée.

2.a. Par définition du projeté orthogonal, H est le point d'intersection du plan (SBC) avec la droite passant par O et orthogonale à ce plan. La droite (OH) est donc dirigée par un vecteur normal au plan, par exemple $\vec{n}(0; 2; 1)$, et elle passe par $O(0; 0; 0)$. Une représentation paramétrique de (OH) est donc, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = 0 + 0 \times t = 0 \\ y = 0 + 2t = 2t \\ z = 0 + 1 \times t = t \end{cases}$$

2.b. Le point H appartient à la fois à la droite (OH) et au plan (SBC) . On injecte donc la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne du plan :

$$2 \times (2t) + t - 2 = 0 \iff 5t = 2 \iff t = \frac{2}{5}.$$

En reportant cette valeur dans la représentation paramétrique :

$$H \left(0; \frac{4}{5}; \frac{2}{5} \right).$$

2.c. La distance du point O au plan (SBC) est la longueur OH , car H est le point du plan le plus proche de O . Dans le repère orthonormé :

$$OH = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

La distance du point O au plan (SBC) vaut donc $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm, soit environ 0,89 cm.

Partie C 1.a. La base $ABCD$ est un carré de côté 2 cm : son aire vaut $2 \times 2 = 4$ cm². La hauteur de la pyramide issue de S est le segment $[OS]$, de longueur 2 cm (le point O est le centre du carré et (OS) est orthogonale à la base). Donc

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 4 \times 2 = \frac{8}{3} \text{ cm}^3.$$

1.b. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ partagent le carré $ABCD$ en quatre triangles de même aire : OAB , OBC , OCD et ODA , chacun d'aire $\frac{4}{4} = 1$ cm². Les quatre pyramides de sommet S construites sur ces quatre triangles ont donc la même aire de base, et la même hauteur $OS = 2$ cm : elles ont le même volume. Comme leur réunion est la pyramide $SABCD$,

$$V_{OCBS} = \frac{1}{4} \times V_{SABCD} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3} \text{ cm}^3.$$

(On le retrouve directement : la pyramide $OCBS$ a pour base le triangle OBC , d'aire 1 cm², et pour sommet S , à la hauteur 2 cm de la base ; d'où $\frac{1}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2}{3}$ cm³.)

2. Le triangle SBC est isocèle en S , car $SB = SC = \sqrt{6}$ cm (partie A). La médiane issue de S est donc aussi une hauteur : le point J , milieu de $[BC]$, est le pied de la hauteur issue de S . Avec $J(0; 1; 0)$:

$$SJ = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \text{ cm}, \quad BC = 2 \text{ cm}.$$

L'aire du triangle SBC vaut donc

$$\mathcal{A}_{SBC} = \frac{1}{2} \times BC \times SJ = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5} \text{ cm}^2.$$

3. On calcule le volume de la même pyramide $OCBS$, mais en prenant cette fois le triangle SBC comme base : le sommet est alors O , et la hauteur correspondante est exactement la distance d du point O au plan (SBC) . Donc

$$V_{OCBS} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{SBC} \times d = \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times d.$$

En identifiant avec la valeur $\frac{2}{3}$ obtenue à la question 1.b :

$$\frac{1}{3}\sqrt{5}d = \frac{2}{3} \iff \sqrt{5}d = 2 \iff d = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

On retrouve bien la distance $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm obtenue dans la partie B.

Ce que le correcteur attend : dire explicitement que l'on calcule deux fois le volume du *même* solide, en changeant la face choisie comme base — c'est ce changement de point de vue, et lui seul, qui fait apparaître la distance cherchée comme une hauteur.

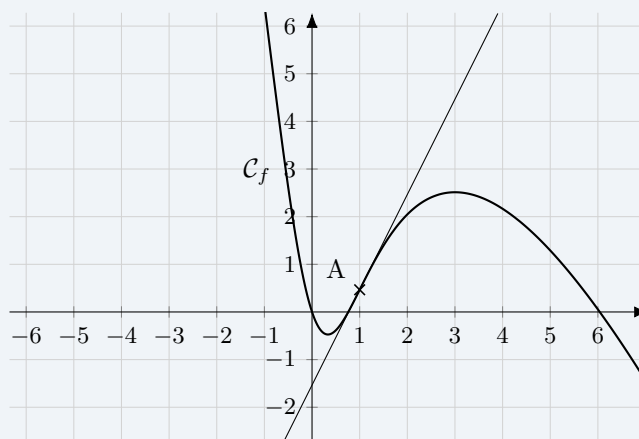
Exercice 4

Sujet — Exercice 4 — 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$ et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f , les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.
- 3.a. Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,

$$f(x) = x \left(10 \frac{\ln x}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$$

- 3.b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.
- 4.a. Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$.
- 4.b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x ,

$$f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}.$$

- 5.a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1.
- 5.b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
- 5.c. En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$.

Corrigé

1. Sur la partie tracée, la courbe $\mathcal{C}_f$ est d'abord « tournée vers le haut » (elle descend en s'aplatissant, puis remonte : elle reste au-dessus de ses tangentes), et ce jusqu'au voisinage de l'abscisse 1. Ensuite, elle est « tournée vers le bas » et passe au-dessous de ses tangentes. La tangente tracée au point A rend ce changement très lisible : la courbe est *au-dessus* d'elle à gauche de A et *au-dessous* à droite — elle *traverse* sa tangente en A , ce qui est la signature d'un changement de concavité. On conjecture donc :

$$f \text{ semble convexe sur }]-\infty; 1] \quad \text{et concave sur } [1; +\infty[.$$

Réserve à formuler : la courbe n'est visible que pour x supérieur à -1 environ (plus à gauche, elle sort de la fenêtre par le haut). La partie de la conjecture qui concerne $]-\infty; -1]$ n'est donc pas réellement lue sur le graphique : c'est une extrapolation, et la question 5.a montrera qu'elle est fausse.

2. Étudions séparément les deux termes de $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$ lorsque x tend vers $-\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$; comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$, on obtient par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 \ln(x^2 + 1) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x) = +\infty$.

Par somme de deux limites infinies de même signe :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Il n'y a ici aucune forme indéterminée : les deux termes tendent tous les deux vers $+\infty$.

3.a. Soit x un réel strictement positif. On factorise par x^2 à l'intérieur du logarithme :

$$x^2 + 1 = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Les deux facteurs x^2 et $1 + \frac{1}{x^2}$ sont strictement positifs, donc le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes :

$$\ln(x^2 + 1) = \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right),$$

en utilisant $\ln(x^2) = 2 \ln x$, valable *parce que* $x > 0$. Donc

$$f(x) = 5 \left(2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x = 10 \ln x - 3x + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Enfin, comme $x \neq 0$, on peut mettre x en facteur dans les deux premiers termes : $10 \ln x - 3x = x \left(\frac{10 \ln x}{x} - 3\right)$. D'où, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = x \left(10 \frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

3.b. L'écriture directe $5 \ln(x^2 + 1) - 3x$ conduit en $+\infty$ à la forme indéterminée « $+\infty - \infty$ » : on utilise donc la forme obtenue à la question 3.a.

- D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(10 \frac{\ln x}{x} - 3\right) = -3$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, le produit d'une quantité tendant vers $+\infty$ par une quantité tendant vers $-3 < 0$ donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(10 \frac{\ln x}{x} - 3\right) = -\infty.$$

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$, et par composition avec $\ln$ (continue en 1, avec $\ln 1 = 0$) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

Par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Ce que le correcteur attend : dire que la forme initiale est indéterminée, et nommer les croissances comparées — c'est le seul argument qui départage $10 \ln x$ et $-3x$.

4.a. La fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive, donc $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\frac{u'}{u}$ avec $u'(x) = 2x$. Ainsi, pour tout réel x :

$$f'(x) = 5 \times \frac{2x}{x^2 + 1} - 3 = \frac{10x}{x^2 + 1} - \frac{3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{10x - 3x^2 - 3}{x^2 + 1} = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}.$$

4.b. Pour tout réel x , $x^2 + 1 > 0$: le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $-3x^2 + 10x - 3$. Son discriminant vaut

$$\Delta = 10^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 100 - 36 = 64 > 0,$$

et $\sqrt{\Delta} = 8$: le trinôme admet deux racines distinctes,

$$x_1 = \frac{-10 + 8}{2 \times (-3)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{-10 - 8}{2 \times (-3)} = \frac{-18}{-6} = 3.$$

Le coefficient de x^2 vaut $-3 < 0$: le trinôme est donc strictement négatif à l'extérieur des racines et strictement positif entre elles. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{3}[,$ strictement croissante sur $[\frac{1}{3}; 3],$ puis strictement décroissante sur $[3; +\infty[.$ Les valeurs exactes aux deux extremums sont

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 5 \ln \left(\frac{1}{9} + 1\right) - 1 = 5 \ln \left(\frac{10}{9}\right) - 1 \approx -0,47, \quad f(3) = 5 \ln(10) - 9 \approx 2,51.$$

Avec les limites des questions 2 et 3.b, on obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$5 \ln\left(\frac{10}{9}\right) - 1$	$\nearrow$	$5 \ln(10) - 9$	$\searrow$	$-\infty$

La fonction f admet donc un minimum local en $\frac{1}{3}$ et un maximum local en 3, ce que confirme la courbe donnée.

5.a. Pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2} = \frac{10(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Le dénominateur $(x^2 + 1)^2$ est strictement positif et $10 > 0$: le signe de $f''(x)$ est celui de $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$. Ce trinôme, de coefficient dominant négatif et de racines -1 et 1 , est positif sur $[-1; 1]$ et négatif à l'extérieur. D'après la caractérisation de la convexité par la dérivée seconde :

— $f''(x) \leq 0$ sur $]-\infty; -1]$: f est **concave** sur cet intervalle ;

- $f''(x) \geq 0$ sur $[-1; 1]$: f est **convexe** sur $[-1; 1]$;
- $f''(x) \leq 0$ sur $[1; +\infty[$: f est **concave** sur cet intervalle.

La dérivée seconde s'annulant en changeant de signe en -1 et en 1 , la courbe admet deux points d'inflexion, d'abscisses -1 et 1 .

La conjecture de la question 1 est donc **à rejeter** telle qu'elle était formulée : la concavité sur $[1; +\infty[$ est bien confirmée, mais f n'est pas convexe sur tout $] -\infty; 1]$; elle ne l'est que sur $[-1; 1]$, et redevient concave sur $] -\infty; -1]$. C'est précisément la zone que le tracé ne montrait pas.

5.b. Le point A a pour abscisse 1 . On calcule

$$f(1) = 5 \ln(1^2 + 1) - 3 \times 1 = 5 \ln 2 - 3, \quad f'(1) = \frac{-3 + 10 - 3}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit

$$y = 2(x - 1) + 5 \ln 2 - 3 = 2x - 2 + 5 \ln 2 - 3,$$

c'est-à-dire, sous forme réduite :

$$y = 2x + 5 \ln 2 - 5.$$

Contrôle graphique : $5 \ln 2 - 5 \approx -1,53$ et la droite tracée coupe bien l'axe des ordonnées vers $-1,5$, avec un coefficient directeur 2 (deux carreaux vers le haut pour un vers la droite).

5.c. D'après la question 5.a, la fonction f est concave sur l'intervalle $[1; +\infty[$. Or, pour une fonction concave sur un intervalle, la courbe représentative est située **au-dessous** de chacune de ses tangentes sur cet intervalle. En appliquant cela à la tangente au point A , d'abscisse 1 , on obtient pour tout $x \geq 1$:

$$f(x) \leq 2x + 5 \ln 2 - 5,$$

c'est-à-dire

$$5 \ln(x^2 + 1) - 3x \leq 2x + 5 \ln 2 - 5.$$

On ajoute $3x$ aux deux membres :

$$5 \ln(x^2 + 1) \leq 5x + 5 \ln 2 - 5,$$

puis on divise par $5 > 0$, ce qui conserve le sens de l'inégalité :

$$\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln 2 - 1 \quad \text{pour tout } x \geq 1.$$

Ce que le correcteur attend : la concavité doit être invoquée sur un intervalle contenant à la fois le point de tangence 1 et le réel x considéré — d'où la restriction $x \geq 1$, qui n'est pas un détail : pour $x = 0$, l'inégalité donnerait $0 \leq \ln 2 - 1 \approx -0,31$, ce qui est faux.