

Mathématiques

Baccalauréat général 2026 — épreuve de spécialité

Amérique du Nord, session 2026 (26-MATJ2AN1)

Corrigé

Quatre exercices

Exercice 1

Sujet — Exercice 1 — 4 points

Un supermarché dispose d'un stock de tomates provenant de deux fournisseurs A et B.
Il a été constaté que :

- 91 % du stock de tomates est commercialisable ;
- 60 % du stock de tomates provient du fournisseur A ;
- parmi les tomates provenant du fournisseur A, la proportion de tomates commercialisables est de 95 %.

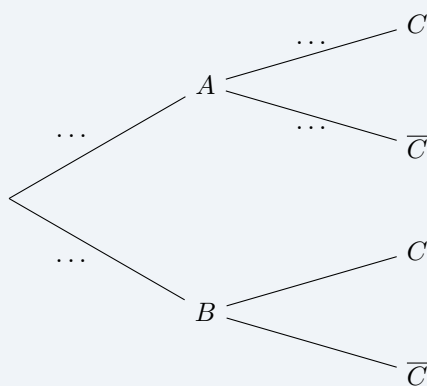
On choisit au hasard une tomate dans le stock.

On désigne par :

- A l'événement « La tomate provient du fournisseur A » ;
- B l'événement « La tomate provient du fournisseur B » ;
- C l'événement « La tomate est commercialisable ».

Pour un événement quelconque E , on note $P(E)$ la probabilité de E .

Partie A 1. Recopier l'arbre ci-dessous en complétant les pointillés.



2.a. Déterminer la probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A.

2.b. Démontrer que $P_B(C) = 0,85$.

2.c. La tomate choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois moins de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison ?

Partie B On rappelle que 9 % des tomates du stock ne sont pas commercialisables.

1. On prend 15 tomates dans le stock au hasard et de manière indépendante. On considère que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables dans cet échantillon de 15 tomates.

1.a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.

1.b. Déterminer la probabilité qu'exactly deux tomates soient non commercialisables. On donnera la valeur arrondie au millièème.

1.c. Déterminer la probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables. On donnera la valeur arrondie au millièème.

2. On constitue désormais un échantillon de n tomates, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel non nul.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables et F_n la variable aléatoire égale à la fréquence de tomates non commercialisables dans cet échantillon de n tomates. On a donc $F_n = \frac{X_n}{n}$.

On admet que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et 0,09.

2.a. Calculer l'espérance $E(F_n)$ et exprimer la variance $V(F_n)$ en fonction de n .

2.b. Démontrer que $P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$.

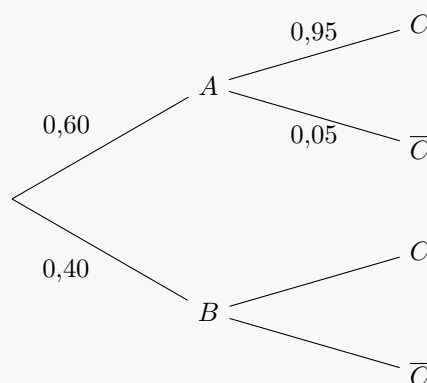
2.c. Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 500 tomates. Il s'aperçoit que 55 tomates ne sont pas commercialisables. Est-ce conforme à ce qu'il pouvait attendre ? Justifier la réponse.

Corrigé

Partie A 1. Les trois données de l'énoncé se traduisent ainsi :

- 60 % du stock provient de A : $P(A) = 0,60$; le stock ne provenant que des deux fournisseurs A et B, l'événement B est l'événement contraire de A , donc $P(B) = P(\bar{A}) = 1 - 0,60 = 0,40$;
- parmi les tomates de A, 95 % sont commercialisables : c'est une probabilité *conditionnelle*, $P_A(C) = 0,95$, d'où $P_A(\bar{C}) = 1 - 0,95 = 0,05$ (la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1) ;
- 91 % du stock est commercialisable : $P(C) = 0,91$ (cette donnée ne figure pas sur une branche de l'arbre : elle porte sur l'ensemble du stock).

Les quatre pointillés valent donc, de haut en bas : 0,95 et 0,05 sur les branches issues de A, 0,60 sur la branche A et 0,40 sur la branche B.



Les deux branches issues de B ne portent pas de pointillé : elles valent $P_B(C)$ et $P_B(\bar{C})$, que la question 2.b déterminera (0,85 et 0,15).

2.a. L'événement demandé est $A \cap C$. La probabilité d'un chemin de l'arbre est le produit des probabilités portées par ses branches :

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0,60 \times 0,95 = 0,57.$$

La probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A est 0,57.

2.b. Les événements A et $B = \bar{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C).$$

On connaît $P(C) = 0,91$ et $P(A \cap C) = 0,57$, donc

$$P(B \cap C) = 0,91 - 0,57 = 0,34.$$

Comme $P(B) = 0,40 \neq 0$, la définition de la probabilité conditionnelle donne

$$P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{0,34}{0,40} = \frac{34}{40} = 0,85.$$

Ce que le correcteur attend : la probabilité demandée est $P_B(C)$, et non $P(B \cap C) = 0,34$; la division par $P(B)$ est l'étape notée.

2.c. On sait maintenant que la tomate est non commercialisable : il faut comparer les probabilités conditionnelles $P_{\bar{C}}(A)$ et $P_{\bar{C}}(B)$. On a $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,91 = 0,09$, puis

$$P(A \cap \bar{C}) = P(A) \times P_A(\bar{C}) = 0,60 \times 0,05 = 0,03,$$

$$P(B \cap \bar{C}) = P(B) \times P_B(\bar{C}) = 0,40 \times (1 - 0,85) = 0,40 \times 0,15 = 0,06.$$

(On vérifie au passage que $0,03 + 0,06 = 0,09 = P(\bar{C})$.) Ainsi

$$P_{\bar{C}}(A) = \frac{0,03}{0,09} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{\bar{C}}(B) = \frac{0,06}{0,09} = \frac{2}{3}.$$

Or $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$: sachant que la tomate n'est pas commercialisable, il y a exactement deux fois moins de chances qu'elle provienne de A que de B . **Le responsable des achats a raison.**
Ce que le correcteur attend : on ne compare pas $P(A) = 0,60$ et $P(B) = 0,40$ (ce serait sans l'information « non commercialisable »), mais bien les probabilités sachant $\bar{C}$.

Partie B 1.a. On répète 15 fois, de façon identique et indépendante (le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise), une même épreuve de Bernoulli à deux issues : « la tomate n'est pas commercialisable », de probabilité $p = 0,09$, ou son contraire. La variable X compte le nombre de succès. Donc X suit la **loi binomiale de paramètres** $n = 15$ et $p = 0,09$, notée $\mathcal{B}(15; 0,09)$.

1.b. Pour tout entier k compris entre 0 et 15, $P(X = k) = \binom{15}{k} \times 0,09^k \times 0,91^{15-k}$. Pour $k = 2$:

$$P(X = 2) = \binom{15}{2} \times 0,09^2 \times 0,91^{13} = 105 \times 0,0081 \times 0,91^{13} \approx 0,249\,58.$$

Arrondie au millième : $P(X = 2) \approx 0,250$.

1.c. « Au plus deux » signifie $X \leq 2$, c'est-à-dire $X = 0$, $X = 1$ ou $X = 2$; ces trois événements étant incompatibles :

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2).$$

Or $P(X = 0) = 0,91^{15} \approx 0,243\,01$ et $P(X = 1) = \binom{15}{1} \times 0,09 \times 0,91^{14} = 1,35 \times 0,91^{14} \approx 0,360\,51$.

Donc

$$P(X \leq 2) \approx 0,243\,01 + 0,360\,51 + 0,249\,58 = 0,853\,10.$$

Arrondie au millième : $P(X \leq 2) \approx 0,853$.

2.a. Comme X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,09$:

$$E(X_n) = np = 0,09n \quad \text{et} \quad V(X_n) = np(1-p) = n \times 0,09 \times 0,91 = 0,0819n.$$

Par linéarité de l'espérance, et puisque $V(aX) = a^2V(X)$ avec $a = \frac{1}{n}$:

$$E(F_n) = \frac{E(X_n)}{n} = \frac{0,09n}{n} = 0,09, \quad V(F_n) = \frac{V(X_n)}{n^2} = \frac{0,0819n}{n^2} = \frac{0,0819}{n}.$$

2.b. L'encadrement $0,04 < F_n < 0,14$ est centré sur $0,09 = E(F_n)$: en retranchant $0,09$, il s'écrit $-0,05 < F_n - 0,09 < 0,05$, c'est-à-dire $|F_n - E(F_n)| < 0,05$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à F_n avec $\epsilon = 0,05 > 0$:

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq 0,05) \leq \frac{V(F_n)}{0,05^2} = \frac{0,0819/n}{0,0025} = \frac{32,76}{n}.$$

En passant à l'événement contraire (pour tout événement M , $P(M) = 1 - P(\overline{M})$) :

$$P(|F_n - 0,09| < 0,05) \geq 1 - \frac{32,76}{n},$$

soit exactement $P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$.

Ce que le correcteur attend : centrer l'encadrement sur l'espérance avant d'appliquer l'inégalité, et ne pas oublier le passage au contraire, qui transforme la majoration « $\leq$ » en minoration « $\geq$ ».

2.c. Ici $n = 500$, et la minoration précédente donne

$$P(0,04 < F_{500} < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{500} = 1 - 0,065\,52 = 0,934\,48.$$

Autrement dit, *avant* tout prélèvement, la fréquence aléatoire F_{500} d'un échantillon de 500 tomates a au moins 93,4 % de chances d'appartenir à l'intervalle $]0,04; 0,14[$. Or, sur l'échantillon effectivement prélevé, la fréquence observée de tomates non commercialisables vaut

$$f = \frac{55}{500} = 0,11,$$

et $0,04 < 0,11 < 0,14$. L'observation appartient donc à l'intervalle attendu avec une probabilité d'au moins 0,934 : **le résultat est conforme à ce que le responsable pouvait attendre.**
Ce que le correcteur attend : il ne s'agit pas de comparer 0,11 à 0,09 (un écart est normal), mais de constater que 0,11 tombe dans l'intervalle $]0,04; 0,14[$, dont l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev garantit qu'il concentre au moins 93,4 % des échantillons de taille 500.

Exercice 2

Sujet — Exercice 2 — 6 points

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2.a. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Vérifier que, pour tout réel x , on a $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

2.b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode les résultats de la question 2. de la **partie B**. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}.$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

3.a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4 dont on précisera le premier terme.

3.b. En déduire une expression de v_n en fonction de n puis que $u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$ pour tout entier naturel n .

3.c. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2$.

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n) .

```
from math import*

def termes(p) :
    u=...
    S=0
    L=[]
    for i in range(p) :
        S=...
        u=...
        L.append(S)
    return L
```

Remarque : on rappelle qu'en langage Python, la commande `L=[]` crée une liste vide ; la commande `L.append(S)` ajoute, à la fin de la liste `L`, l'élément supplémentaire `S`.

2. On rappelle que, pour tout entier naturel k , on a $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leq S_n \leq 3n$.

3. En déduire les limites respectives de S_n et de $\frac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé

Partie A **1.** Pour tout réel x , $1+x^2 > 0$: l'équation est définie sur $\mathbb{R}$. On la ramène à un produit nul :

$$f(x) = x \iff \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - x = 0 \iff x \left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) = 0.$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est.

— Soit $x = 0$;

— soit $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1$, c'est-à-dire $\sqrt{1+x^2} = 2$. Les deux membres étant positifs, on peut élever au carré : $1+x^2 = 4$, donc $x^2 = 3$ et $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$.

2.a. Écrivons $f(x) = 2x \times (1+x^2)^{-1/2}$, produit de $u : x \mapsto 2x$ et de $w : x \mapsto (1+x^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. On a $u'(x) = 2$ et, en dérivant w comme composée $((\sqrt{v})' = \frac{v'}{2\sqrt{v}}$ puis dérivée d'un quotient, avec $v(x) = 1+x^2 > 0$) :

$$w'(x) = -\frac{(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} = -\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

La formule $(uw)' = u'w + uw'$ donne alors

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{2(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}},$$

où l'on a réduit au même dénominateur $(1+x^2)\sqrt{1+x^2}$. C'est bien l'expression annoncée.

2.b. Pour tout réel x , $1+x^2 > 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$, donc le dénominateur $(1+x^2)\sqrt{1+x^2}$ est strictement positif ; le numérateur vaut $2 > 0$. Ainsi $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$: la fonction f est **strictement croissante sur $\mathbb{R}$** .

Partie B **1.** Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$ ». Démontrons-la par récurrence.

Initialisation. On a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Comme $1 \leq 1 \leq \sqrt{2} < \sqrt{3}$ (car $2 < 3$), la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier naturel n fixé, c'est-à-dire $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$. La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (partie A), elle conserve l'ordre : en appliquant f à cet encadrement,

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(\sqrt{3}),$$

c'est-à-dire, puisque $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \sqrt{3}, \quad \text{où} \quad f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Comme $1 \leq \sqrt{2}$, on obtient $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \sqrt{3}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.

Ce que le correcteur attend : l'hérédité s'obtient en appliquant f à l'encadrement *entier* et en invoquant explicitement la stricte croissance de f ; le calcul $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ (déjà visible en partie A : $\sqrt{3}$ est un point fixe) est indispensable pour conserver la borne.

2. D'après la question précédente, $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n : la suite (u_n) est croissante ; et $u_n < \sqrt{3}$ pour tout n : elle est majorée par $\sqrt{3}$. D'après le **théorème de convergence monotone**, toute suite croissante et majorée converge : (u_n) converge vers un réel ℓ .

Déterminons ℓ . La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (elle y est dérivable), donc en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient $\ell = f(\ell)$: ℓ est solution de l'équation de la partie A, donc $\ell \in \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$. Or $u_n \geq 1$ pour tout n , donc par passage à la limite dans l'inégalité $\ell \geq 1$. Seule la valeur $\sqrt{3}$ convient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}.$$

3.a. Calculons d'abord u_{n+1}^2 :

$$u_{n+1}^2 = \left(\frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} \right)^2 = \frac{4u_n^2}{1+u_n^2}.$$

Puis le dénominateur de v_{n+1} :

$$3 - u_{n+1}^2 = 3 - \frac{4u_n^2}{1+u_n^2} = \frac{3(1+u_n^2) - 4u_n^2}{1+u_n^2} = \frac{3 - u_n^2}{1+u_n^2}.$$

Comme $1 \leq u_n < \sqrt{3}$, on a $3 - u_n^2 > 0$: ce dénominateur n'est pas nul, et

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3 - u_{n+1}^2} = \frac{4u_n^2}{1+u_n^2} \times \frac{1+u_n^2}{3 - u_n^2} = 4 \times \frac{u_n^2}{3 - u_n^2} = 4v_n.$$

Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 4v_n$: la suite (v_n) est **géométrique de raison 4**, de premier terme

$$v_0 = \frac{u_0^2}{3 - u_0^2} = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

3.b. Une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 vérifie $v_n = v_0 q^n$, donc

$$v_n = 0,5 \times 4^n.$$

Revenons à u_n : de $\frac{u_n^2}{3 - u_n^2} = v_n$ on tire $u_n^2 = v_n(3 - u_n^2)$, soit $u_n^2 + v_n u_n^2 = 3v_n$, c'est-à-dire $u_n^2(1 + v_n) = 3v_n$. Comme $v_n > 0$, $1 + v_n \neq 0$ et

$$u_n^2 = \frac{3v_n}{1 + v_n} = \frac{3 \times 0,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n} = \frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}.$$

Enfin $u_n \geq 1 > 0$, donc u_n est la racine carrée de u_n^2 :

$$u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}.$$

3.c. Le quotient présente une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » : on factorise par le terme dominant 4^n au numérateur et au dénominateur, ou, ce qui revient au même, on divise les deux par $4^n \neq 0$:

$$u_n^2 = \frac{1,5}{\frac{1}{4^n} + 0,5}.$$

Comme $4 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ et, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = \frac{1,5}{0,5} = 3$. La fonction racine carrée étant continue sur $[0; +\infty[$, on conclut

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3},$$

ce qui confirme le résultat de la question 2.

Partie C 1. La variable u doit contenir successivement $u_0, u_1, u_2, \dots$: on l'initialise à $u_0 = 1$. À chaque tour de boucle on ajoute u_i^2 à la somme S , puis on remplace u par le terme suivant

$u_{i+1} = \frac{2u_i}{\sqrt{1+u_i^2}}$, avant d'ajouter la somme courante à la liste. Le script complété est :

```
from math import*

def termes(p) :
    u=1
    S=0
    L=[]
    for i in range(p) :
        S=S+u**2
        u=2*u/sqrt(1+u**2)
        L.append(S)
    return L
```

Au tour $i = 0$, S devient $u_0^2 = S_1$ et est ajouté à la liste ; au tour $i = 1$, S devient $u_0^2 + u_1^2 = S_2$, etc. La fonction renvoie donc la liste $[S_1, S_2, \dots, S_p]$ des p premiers termes de (S_n) .

Ce que le correcteur attend : l'ordre des deux affectations est déterminant. Si l'on met à jour u avant de l'ajouter à S , la somme démarre à u_1^2 et le terme u_0^2 est perdu.

2. Soit k un entier naturel. On a $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$, et ces trois nombres sont positifs ; la fonction carré étant croissante sur $[0; +\infty[$, on peut élever au carré en conservant l'ordre :

$$1^2 \leq u_k^2 \leq (\sqrt{3})^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1 \leq u_k^2 \leq 3.$$

Soit maintenant n un entier naturel non nul. La somme S_n comporte exactement n termes (u_0^2 jusqu'à u_{n-1}^2). En additionnant membre à membre les n encadrements précédents pour $k = 0, 1, \dots, n-1$:

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ termes}} \leq S_n \leq \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{n \text{ termes}}, \quad \text{soit} \quad n \leq S_n \leq 3n.$$

3. Limite de S_n . De $n \leq S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on déduit par le théorème de comparaison (minoration par une suite tendant vers $+\infty$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Limite de $\frac{S_n}{n^2}$. Pour $n \geq 1$, $n^2 > 0$: en divisant l'encadrement $n \leq S_n \leq 3n$ par n^2 , l'ordre est conservé :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{3}{n}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$: les deux suites encadrantes ont la même limite 0, donc d'après le **théorème des gendarmes** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} = 0.$$

Ce que le correcteur attend : S_n tend vers $+\infty$ mais « pas trop vite » : elle croît comme n , donc $\frac{S_n}{n^2}$ tend vers 0. Le théorème des gendarmes exige que les deux bornes aient la *même* limite ; diviser par n (et non n^2) donnerait $1 \leq \frac{S_n}{n} \leq 3$, ce qui ne suffirait pas à conclure.

Exercice 3

Sujet — Exercice 3 — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(4; 2; 2)$, $B(5; -2; 3)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R};$$

- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et perpendiculaire à la droite Δ .

1. Vérifier que la droite Δ passe par le point $C(1; 1; 1)$ mais pas par le point A .
- 2.a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $2x + y + 2z - 14 = 0$.
- 2.b. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ passe par le point B mais pas par le point C .
3. On considère le point $D(3; 2; 3)$.
- 3.a. Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$.
- 3.b. Justifier que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.
- 3.c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
- 3.d. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.

4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .

- 4.a. Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\frac{73}{29}; \frac{-4}{29}; \frac{51}{29}\right)$.

- 4.b. Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3\sqrt{22}}{2}$.

- 4.c. En déduire la distance du point D au plan (ABC) .

Corrigé

1. Un point appartient à Δ si et seulement s'il existe *un même* réel t donnant ses trois coordonnées.

Pour $C(1; 1; 1)$: en prenant $t = 0$, la représentation paramétrique donne $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$: ce sont exactement les coordonnées de C . Donc $C \in \Delta$.

Pour $A(4; 2; 2)$: la première équation impose $1 + 2t = 4$, donc $t = \frac{3}{2}$. Pour cette valeur, $y = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \neq 2$. Aucun réel t ne convient : $A \notin \Delta$.

2.a. La représentation paramétrique de Δ montre que $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ (ce sont les coefficients de t). Le plan $\mathcal{P}$ étant perpendiculaire à Δ , le vecteur $\vec{u}$ est un **vecteur normal** à $\mathcal{P}$.

D'après le théorème sur l'équation cartésienne d'un plan, $\mathcal{P}$ admet donc une équation de la forme $2x + y + 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$. Le plan passe par $A(4; 2; 2)$, dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$2 \times 4 + 2 + 2 \times 2 + d = 0 \iff 8 + 2 + 4 + d = 0 \iff d = -14.$$

Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donc $2x + y + 2z - 14 = 0$.

2.b. On remplace les coordonnées dans le membre de gauche :

$$\text{pour } B(5; -2; 3) : 2 \times 5 + (-2) + 2 \times 3 - 14 = 10 - 2 + 6 - 14 = 0,$$

donc $B \in \mathcal{P}$;

$$\text{pour } C(1; 1; 1) : 2 \times 1 + 1 + 2 \times 1 - 14 = 2 + 1 + 2 - 14 = -9 \neq 0,$$

donc $C \notin \mathcal{P}$.

3.a. Le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$ est l'unique point D tel que $D \in \mathcal{P}$ et $(CD) \perp \mathcal{P}$. Vérifions ces deux conditions pour $D(3; 2; 3)$.

$$- 2 \times 3 + 2 + 2 \times 3 - 14 = 6 + 2 + 6 - 14 = 0, \text{ donc } D \in \mathcal{P};$$

$$- \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u} : \text{le vecteur } \overrightarrow{CD} \text{ est colinéaire (ici égal) au vecteur normal } \vec{u} \text{ de } \mathcal{P}, \text{ et il est non nul, donc la droite } (CD) \text{ est orthogonale au plan } \mathcal{P}.$$

Le point D est donc bien le projeté orthogonal de C sur le plan $\mathcal{P}$. (On remarque au passage que (CD) n'est autre que la droite Δ , qui passe par C et a pour vecteur directeur $\vec{u}$: D est le point de Δ de paramètre $t = 1$.)

3.b. Les points A , B et D appartiennent tous les trois au plan $\mathcal{P}$ (questions **2.a**, **2.b** et **3.a**). De plus

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-4 \\ -2-2 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 3-4 \\ 2-2 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas colinéaires : s'il existait λ tel que $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB}$, la deuxième coordonnée donnerait $0 = -4\lambda$, donc $\lambda = 0$, et la première $-1 = 0$, ce qui est absurde. Les points A , B , D ne sont donc pas alignés : ils définissent un plan, qui est nécessairement $\mathcal{P}$.

Or $C \notin \mathcal{P}$ d'après la question **2.b**. Le point C n'appartient donc pas au plan (ABD) : les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires (et $ABCD$ est bien un tétraèdre).

3.c. Le repère étant orthonormé, on utilise l'expression analytique du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \times (-1) + (-4) \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 0 + 1 = 0.$$

3.d. Le produit scalaire précédent étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux : le triangle ABD est rectangle en A . Prenons-le comme base du tétraèdre. Ses côtés de l'angle droit mesurent

$$AB = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad AD = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

d'où l'aire

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_{ABD} = \frac{AB \times AD}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3.$$

La hauteur relative à cette base est la distance du quatrième sommet C au plan de la base, c'est-à-dire au plan $\mathcal{P}$; comme D est le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$ (question 3.a), cette distance vaut

$$h = CD = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Donc

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 = 3.$$

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est égal à 3 unités de volume.

Ce que le correcteur attend : le choix de la base ABD (dans $\mathcal{P}$) n'est pas arbitraire : c'est lui qui rend la hauteur immédiate, puisque le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$ est déjà connu. La question 3.c servait justement à obtenir l'aire sans effort.

4.a. Posons $H \left(\frac{73}{29}; \frac{-4}{29}; \frac{51}{29} \right)$. Le projeté orthogonal de A sur (BC) est l'unique point vérifiant deux conditions : $H \in (BC)$ et $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

H appartient à (BC) : avec $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1-5 \\ 1-(-2) \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, on calcule

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} \frac{73}{29} - 5 \\ \frac{-4}{29} + 2 \\ \frac{51}{29} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{72}{29} \\ \frac{54}{29} \\ -\frac{36}{29} \end{pmatrix} = \frac{18}{29} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{18}{29} \overrightarrow{BC}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc $H \in (BC)$.
(AH) est orthogonale à (BC) :

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{73}{29} - 4 \\ \frac{-4}{29} - 2 \\ \frac{51}{29} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{43}{29} \\ -\frac{62}{29} \\ -\frac{7}{29} \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{(-43) \times (-4) + (-62) \times 3 + (-7) \times (-2)}{29} = \frac{172 - 186 + 14}{29} = 0.$$

Les deux conditions sont vérifiées : H est bien le projeté orthogonal de A sur (BC) .

Autre méthode (pour trouver H sans le connaître). On cherche H sous la forme $\overrightarrow{BH} = s \overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + s \overrightarrow{BC}$, et l'on résout $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + s \|\overrightarrow{BC}\|^2 = 0 \iff (-4 - 12 - 2) + 29s = 0 \iff s = \frac{18}{29},$$

ce qui redonne les coordonnées annoncées.

4.b. Dans le triangle ABC , prenons $[BC]$ pour base : la hauteur issue de A est alors $[AH]$, puisque H est le pied de la perpendiculaire à (BC) issue de A . On calcule les deux longueurs :

$$BC = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29},$$

$$AH = \frac{\sqrt{43^2 + 62^2 + 7^2}}{29} = \frac{\sqrt{1849 + 3844 + 49}}{29} = \frac{\sqrt{5742}}{29}.$$

Or $5742 = 9 \times 638 = 9 \times 29 \times 22$, donc $\sqrt{5742} = 3\sqrt{29} \times \sqrt{22}$ et $AH = \frac{3\sqrt{29}\sqrt{22}}{29} = \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{29}}$.

D'où l'aire

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{29} \times \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{22}}{2}.$$

(Numériquement, $\mathcal{A}_{ABC} \approx 7,04$.)

4.c. Le volume d'un tétraèdre ne dépend pas de la face choisie comme base. Prenons cette fois le triangle ABC comme base : la hauteur relative est alors la distance d du point D au plan (ABC) . La formule rappelée donne

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times d \iff 3 = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{22}}{2} \times d = \frac{\sqrt{22}}{2} d \iff d = \frac{6}{\sqrt{22}}.$$

En rendant le dénominateur rationnel :

$$d = \frac{6}{\sqrt{22}} = \frac{6\sqrt{22}}{22} = \frac{3\sqrt{22}}{11} \approx 1,28.$$

La distance du point D au plan (ABC) vaut $\frac{3\sqrt{22}}{11}$.

Ce que le correcteur attend : le mot « en déduire » signale qu'il faut réutiliser le volume $V = 3$ de la question **3.d** avec une *autre* base, et non chercher une équation cartésienne du plan (ABC) pour appliquer une formule de distance.

Exercice 4

Sujet — Exercice 4 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x \ln x$.

2.a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$.

2.b. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3.a. Démontrer que sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.

3.b. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3.c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1]$.

4. On considère l'équation $f(x) = 2$.

4.a. Justifier que, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, cette équation admet une unique solution. On note α cette solution.

4.b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1]$.

5.a. Donner une interprétation géométrique de $\int_a^1 f(x) dx$.

5.b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_1^a x \ln x dx.$$

5.c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

5.d. Déterminer la limite de $\int_a^1 f(x) dx$ quand a tend vers 0.

Corrigé

1. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\ln x \rightarrow +\infty$, donc $(\ln x)^2 \rightarrow +\infty$ (la fonction carré tend vers $+\infty$ en $+\infty$).
Par produit de deux facteurs tendant vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Il n'y a ici aucune forme indéterminée.

2.a. Soit $x > 0$; alors $\sqrt{x} > 0$ et $g(\sqrt{x})$ est bien défini. En utilisant $\ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln x$:

$$g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \times \frac{1}{2} \ln x = \frac{\sqrt{x}}{2} \ln x,$$

puis, en élevant au carré (et comme $(\sqrt{x})^2 = x$) :

$$4(g(\sqrt{x}))^2 = 4 \times \frac{x}{4} (\ln x)^2 = x(\ln x)^2 = f(x).$$

2.b. D'après le théorème des croissances comparées en 0^+ , $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$, c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0^+$: d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(\sqrt{x}) = 0$.

Enfin, la fonction $t \mapsto 4t^2$ étant continue en 0 et valant 0 en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 4(g(\sqrt{x}))^2 = 4 \times 0^2 = 0.$$

Ce que le correcteur attend : la forme indéterminée est « $0 \times \infty$ ». La question **2.a** sert précisément à la ramener à la croissance comparée *du cours*, $t \ln t \rightarrow 0$, qui porte sur g et non sur f .

3.a. La fonction f est le produit de $u : x \mapsto x$ et de $w : x \mapsto (\ln x)^2$. On a $u'(x) = 1$ et, en dérivant w comme composée $(v^2)' = 2v'v$ avec $v(x) = \ln x$, $w'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2 \ln x}{x}$. D'après $(uw)' = u'w + uw'$, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 1 \times (\ln x)^2 + x \times \frac{2 \ln x}{x} = (\ln x)^2 + 2 \ln x.$$

En factorisant par $\ln x$:

$$f'(x) = (\ln x)(\ln x + 2) = (\ln x)(2 + \ln x).$$

3.b. Le signe de $f'(x)$ est celui d'un produit de deux facteurs :

- $\ln x = 0 \iff x = 1$, et $\ln x > 0 \iff x > 1$;
- $2 + \ln x = 0 \iff \ln x = -2 \iff x = e^{-2}$, et $2 + \ln x > 0 \iff x > e^{-2}$.

Comme $e^{-2} \approx 0,135 < 1$, on obtient, sur $]0; +\infty[$:

- sur $]0; e^{-2}[$: $\ln x < -2 < 0$ et $2 + \ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$;
- sur $]e^{-2}; 1[$: $\ln x < 0$ et $2 + \ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$;
- sur $]1; +\infty[$: $\ln x > 0$ et $2 + \ln x > 0$, donc $f'(x) > 0$.

Avec les valeurs $f(e^{-2}) = e^{-2} \times (-2)^2 = \frac{4}{e^2}$, $f(1) = 1 \times 0^2 = 0$, ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (question **2.b**) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (question **1.**), le tableau de variations est :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est strictement croissante sur $]0; e^{-2}]$, strictement décroissante sur $[e^{-2}; 1]$, puis strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Le 0 inscrit sous la borne 0 du tableau n'est pas une valeur

de f (la fonction n'y est pas définie) mais la limite obtenue à la question **2.b**; en revanche la valeur 0 en $x = 1$ est bien atteinte, puisque $f(1) = 0$.

3.c. Sur $]0; 1]$, la fonction f croît jusqu'en e^{-2} puis décroît : elle atteint son maximum en $x = e^{-2}$, et ce maximum vaut

$$f(e^{-2}) = e^{-2} (\ln e^{-2})^2 = e^{-2} \times (-2)^2 = \frac{4}{e^2} \approx 0,541.$$

4.a. Traitons séparément les deux intervalles de monotonie utiles.

Sur $]0; 1]$: d'après la question **3.c**, pour tout x de cet intervalle, $f(x) \leq \frac{4}{e^2} \approx 0,541 < 2$.

L'équation $f(x) = 2$ n'y a donc aucune solution.

Sur $[1; +\infty[$: la fonction f est dérivable donc continue, et strictement croissante (question **3.b**), avec $f(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Comme 2 est compris entre $f(1) = 0$ et cette limite, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection, étendu à un intervalle non borné en remplaçant la valeur en la borne par la limite) assure que l'équation $f(x) = 2$ admet une **unique** solution α dans $[1; +\infty[$.

En réunissant les deux intervalles, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.
Ce que le correcteur attend : les trois hypothèses du corollaire (continuité, stricte monotonie, valeur cible entre les images ou limites aux bornes) doivent être citées ; et l'unicité sur tout $]0; +\infty[$ exige d'écarter explicitement l'intervalle $]0; 1]$, où f n'est pas monotone mais reste majorée par $\frac{4}{e^2} < 2$.

4.b. La fonction f étant strictement croissante sur $[1; +\infty[$, il suffit d'encadrer 2 par deux valeurs de f . À la calculatrice :

$$f(2,4) = 2,4 (\ln 2,4)^2 \approx 1,839 \quad \text{et} \quad f(2,5) = 2,5 (\ln 2,5)^2 \approx 2,099.$$

Ainsi $f(2,4) < 2 < f(2,5)$, et la stricte croissance donne

$$2,4 < \alpha < 2,5,$$

encadrement d'amplitude $2,5 - 2,4 = 0,1$.

5.a. Sur $]0; 1]$, on a $x > 0$ et $(\ln x)^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq 0$: la fonction f est positive sur $[a; 1]$, et $a \leq 1$. L'intégrale $\int_a^1 f(x) dx$ est donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = 1$.

5.b. Remarque sur l'énoncé : tel qu'il est imprimé, le second membre comporte l'intégrale $\int_1^a x \ln x dx$; la relation exacte, et celle qu'utilise la question **5.c**, fait intervenir $\int_a^1 x \ln x dx$ (les bornes sont les mêmes que celles de l'intégrale de gauche). C'est cette relation que l'on démontre. On peut aussi conserver les bornes imprimées à condition de changer le signe, puisque $\int_1^a x \ln x dx = - \int_a^1 x \ln x dx$:

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 + \int_1^a x \ln x dx.$$

Les fonctions $u : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $v : x \mapsto (\ln x)^2$ sont dérivables sur $[a; 1]$ (inclus dans $]0; +\infty[$) et leurs dérivées

$$u'(x) = x \quad \text{et} \quad v'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2 \ln x}{x}$$

y sont continues : on peut appliquer la formule d'intégration par parties $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$. Avec $f(x) = x(\ln x)^2 = u'(x)v(x)$:

$$\int_a^1 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{2 \ln x}{x} dx = \left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_a^1 - \int_a^1 x \ln x dx,$$

car $\frac{x^2}{2} \times \frac{2 \ln x}{x} = x \ln x$. Comme $\ln 1 = 0$, le crochet vaut

$$\left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_a^1 = \frac{1}{2} \times 0^2 - \frac{a^2}{2} (\ln a)^2 = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2,$$

d'où

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x dx.$$

5.c. Calculons $\int_a^1 x \ln x dx$ par une seconde intégration par parties, en posant cette fois $u(x) = \frac{x^2}{2}$ (donc $u'(x) = x$) et $v(x) = \ln x$ (donc $v'(x) = \frac{1}{x}$), toujours dérivables à dérivées continues sur $[a; 1]$:

$$\int_a^1 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x}{2} dx.$$

Le crochet vaut $\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{a^2}{2} \ln a = -\frac{a^2}{2} \ln a$, et $\int_a^1 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_a^1 = \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$. Donc

$$\int_a^1 x \ln x dx = -\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}.$$

En reportant dans la relation de la question **5.b** :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \left(-\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} \right) = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

C'est bien l'égalité demandée.

Vérification : pour $a = 1$, le second membre vaut $0 + 0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$, ce qui est cohérent puisque $\int_1^1 f(x) dx = 0$.

5.d. Étudions séparément les trois termes dépendant de a lorsque $a \rightarrow 0^+$.

- $a^2 (\ln a)^2 = (a \ln a)^2$: par croissances comparées, $a \ln a \rightarrow 0$, donc $(a \ln a)^2 \rightarrow 0$ et $-\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 \rightarrow 0$;
- $a^2 \ln a \rightarrow 0$ par croissances comparées (cas $n = 2$ en 0^+), donc $\frac{a^2}{2} \ln a \rightarrow 0$;
- $a^2 \rightarrow 0$, donc $-\frac{a^2}{4} \rightarrow 0$.

Par somme de limites :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 f(x) \, dx = 0 + 0 + \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

Géométriquement (question **5.a**), l'aire du domaine situé sous la courbe de f entre a et 1 ne croît pas indéfiniment lorsque a se rapproche de 0 : elle tend vers la valeur finie $\frac{1}{4}$ unité d'aire.

Ce que le correcteur attend : le terme $a^2(\ln a)^2$ ne se traite pas par la croissance comparée brute ; il faut reconnaître le carré de $a \ln a$ (même idée qu'à la question **2.a**) pour lever la forme indéterminée « $0 \times \infty$ ».