

Mathématiques

Baccalauréat général 2026 — épreuve de spécialité

Asie, session 2026 (26-MATJ1JA1)

Corrigé

Quatre exercices

Exercice 1

Sujet — Exercice 1 — 5 points

Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre.
On modélise la situation de la façon suivante :

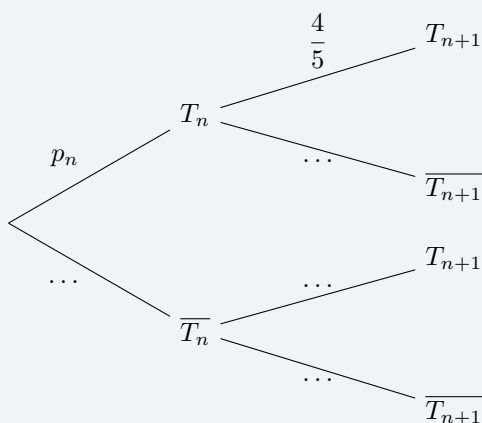
- au premier tir, il atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
- pour les tirs suivants :
 - lorsqu'il a atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne à nouveau le centre de la cible est $\frac{4}{5}$;
 - lorsqu'il n'a pas atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne le centre de la cible est $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement T_n : « Le tireur atteint le centre de la cible au n -ième tir ».

On note $p_n = P(T_n)$ la probabilité que l'évènement T_n se réalise.

1. Donner la valeur de p_1 et montrer que $p_2 = \frac{17}{30}$.

2. Recopier sur la copie l'arbre de probabilité suivant et compléter les pointillés avec les probabilités qui conviennent :



3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3}.$$

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = p_n - \frac{5}{8}.$$

- 4.a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.
 4.b. Déterminer une expression de u_n en fonction de n .
 4.c. En déduire une expression de p_n en fonction de n .
 5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
 6. On considère ci-dessous une fonction `seuil`, incomplète, écrite en langage Python. Recopier cette fonction sur la copie en complétant les pointillés afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de l'entier n telle que p_n soit supérieur ou égal à 0,6.

```

1  def seuil():
2      n = 1
3      p = 0.5
4      while ...:
5          n = ...
6          p = ...
7      return ...

```

7. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $p_n \geq 0,6$.

Corrigé

1. L'énoncé donne directement la probabilité d'atteindre le centre au premier tir :

$$p_1 = P(T_1) = \frac{1}{2}.$$

Pour p_2 , les événements T_1 et $\overline{T_1}$ forment une partition de l'univers (le tireur atteint le centre au premier tir, ou il ne l'atteint pas), et ils sont de probabilité non nulle. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_2 = P(T_2) = P(T_1) \times P_{T_1}(T_2) + P(\overline{T_1}) \times P_{\overline{T_1}}(T_2).$$

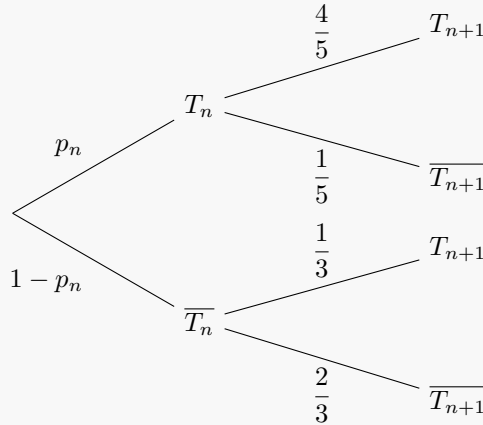
Les probabilités conditionnelles sont celles de l'énoncé : $P_{T_1}(T_2) = \frac{4}{5}$ (il a atteint le centre au tir précédent) et $P_{\overline{T_1}}(T_2) = \frac{1}{3}$ (il ne l'a pas atteint). Avec $P(\overline{T_1}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$:

$$p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{12}{30} + \frac{5}{30} = \frac{17}{30}.$$

2. Les probabilités des branches issues d'un même nœud ont pour somme 1 ; les branches du second niveau portent les probabilités conditionnelles données par l'énoncé, qui ne dépendent que du résultat du tir précédent :

- branche inférieure du premier niveau : $P(\overline{T_n}) = 1 - p_n$;
- branche inférieure issue de T_n : $P_{T_n}(\overline{T_{n+1}}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$;
- branches issues de $\overline{T_n}$: $P_{\overline{T_n}}(T_{n+1}) = \frac{1}{3}$ et $P_{\overline{T_n}}(\overline{T_{n+1}}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

L'arbre complété est donc le suivant :



3. Soit n un entier naturel non nul. Les événements T_n et $\overline{T_n}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, en lisant sur l'arbre les deux chemins qui mènent à T_{n+1} :

$$p_{n+1} = P(T_{n+1}) = P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(\overline{T_n}) \times P_{\overline{T_n}}(T_{n+1}) = p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3}.$$

On développe et on réduit les coefficients de p_n au même dénominateur :

$$p_{n+1} = \frac{4}{5} p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} p_n = \left(\frac{12}{15} - \frac{5}{15} \right) p_n + \frac{1}{3} = \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3}$.

4.a. Soit n un entier naturel non nul. En utilisant la relation de récurrence de la question 3 :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{8} = \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{8} = \frac{7}{15} p_n + \frac{8}{24} - \frac{15}{24} = \frac{7}{15} p_n - \frac{7}{24}.$$

D'autre part :

$$\frac{7}{15} u_n = \frac{7}{15} \left(p_n - \frac{5}{8} \right) = \frac{7}{15} p_n - \frac{35}{120} = \frac{7}{15} p_n - \frac{7}{24}.$$

Les deux expressions coïncident, donc $u_{n+1} = \frac{7}{15} u_n$ pour tout entier naturel n non nul : la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{7}{15}$.

Ce que le correcteur attend : le calcul de u_{n+1} doit aboutir à $q \times u_n$, c'est-à-dire faire réapparaître $u_n = p_n - \frac{5}{8}$; affirmer « on reconnaît une suite géométrique » sans ce calcul ne vaut rien.

4.b. Le premier terme de la suite (u_n) est celui d'indice 1 :

$$u_1 = p_1 - \frac{5}{8} = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \frac{4}{8} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}.$$

Le terme général d'une suite géométrique de raison q dont le premier terme est d'indice 1 est $u_n = u_1 \times q^{n-1}$. Donc, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = -\frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1}.$$

Ce que le correcteur attend : l'exposant $n - 1$, et non n : la suite commence au rang 1.

4.c. Par définition, $u_n = p_n - \frac{5}{8}$, donc $p_n = u_n + \frac{5}{8}$. On en déduit, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1}.$$

Contrôle : pour $n = 1$, $p_1 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$; pour $n = 2$, $p_2 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \times \frac{7}{15} = \frac{75}{120} - \frac{7}{120} = \frac{68}{120} = \frac{17}{30}$.
On retrouve bien les valeurs de la question 1.

5. La raison vérifie $-1 < \frac{7}{15} < 1$, donc, d'après le théorème sur les limites des suites géométriques :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1} = 0.$$

Par produit puis par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{5}{8} = 0,625.$$

Interprétation : au fil de l'entraînement, la probabilité que le tireur atteigne le centre de la cible à un tir donné se stabilise autour de 0,625, soit 62,5 % : sur un très grand nombre de tirs, il touche le centre environ 5 fois sur 8. On observe d'ailleurs que la suite (p_n) est croissante (car $u_n < 0$ et $|u_n|$ décroît), et qu'elle reste toujours inférieure à $\frac{5}{8}$.

6. À l'entrée dans la boucle, la variable **n** contient un indice et la variable **p** contient p_n : c'est le cas au départ, avec $n = 1$ et $p_1 = 0,5$. Tant que la condition cherchée n'est pas atteinte, c'est-à-dire tant que $p < 0,6$, on passe au rang suivant en incrémentant **n**, puis on calcule p_{n+1} à partir de p_n grâce à la relation de la question 3. À la sortie de la boucle, **p** contient le premier terme supérieur ou égal à 0,6 et **n** son indice : c'est ce que la fonction doit renvoyer.

```

1  def seuil():
2      n = 1
3      p = 0.5
4      while p < 0.6:
5          n = n + 1
6          p = 7 / 15 * p + 1 / 3
7      return n

```

La ligne 4 est la condition « tant que le seuil n'est pas atteint », contraire de $p_n \geq 0,6$; les lignes 5 et 6 font passer du rang n au rang $n + 1$; la ligne 7 renvoie l'indice. L'ordre des lignes 5 et 6 est ici sans conséquence sur le résultat, car la relation de récurrence ne fait pas intervenir n , mais il faut bien renvoyer **n** et non **p**. Cette fonction renvoie 4.

7. On utilise l'expression obtenue à la question 4.c. Pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n \geq 0,6 \iff \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1} \geq \frac{3}{5} \iff -\frac{1}{8} \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1} \geq \frac{3}{5} - \frac{5}{8}.$$

Or $\frac{3}{5} - \frac{5}{8} = \frac{24}{40} - \frac{25}{40} = -\frac{1}{40}$. En multipliant les deux membres par $-8 < 0$, le sens de l'inégalité change :

$$p_n \geq 0,6 \iff \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1} \leq \frac{8}{40} = \frac{1}{5}.$$

Les deux membres sont strictement positifs et la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc l'inégalité équivaut à :

$$\ln \left(\left(\frac{7}{15} \right)^{n-1} \right) \leq \ln \left(\frac{1}{5} \right) \iff (n-1) \ln \left(\frac{7}{15} \right) \leq \ln \left(\frac{1}{5} \right).$$

Comme $\frac{7}{15} < 1$, on a $\ln \left(\frac{7}{15} \right) < 0$: en divisant par ce nombre strictement négatif, le sens de l'inégalité change de nouveau :

$$n-1 \geq \frac{\ln \left(\frac{1}{5} \right)}{\ln \left(\frac{7}{15} \right)} \approx 2,1117.$$

L'entier $n - 1$ doit donc être supérieur ou égal à 2,1117 : le plus petit convenable est $n - 1 = 3$, c'est-à-dire $n = 4$. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{N}$ est donc

$$S = \{ n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq 4 \}.$$

Contrôle numérique : $p_3 = \frac{269}{450} \approx 0,5978 < 0,6$ et $p_4 = \frac{4133}{6750} \approx 0,6123 \geq 0,6$. C'est bien la valeur 4 que renvoie la fonction `seuil` de la question 6.

Ce que le correcteur attend : les **deux** changements de sens de l'inégalité (multiplication par -8 , puis division par $\ln\left(\frac{7}{15}\right) < 0$), et le passage de $n - 1 \geq 2,11$ à $n - 1 \geq 3$ justifié par le fait que n est un entier. La suite n'étant définie que pour $n \geq 1$, l'entier $n = 0$ n'a pas à être considéré.

Exercice 2

Sujet — Exercice 2 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre choix. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Affirmation 1 : La fonction f admet pour limite 1 en $+\infty$.

2. On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par :

$$w_{n+1} = w_n + 2n + 3.$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n , $w_n = (n+1)^2$.

3. Soit p un nombre réel tel que $0 < p < 1$.

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 3 et p . On note $P(X=1)$ la probabilité de l'évènement $(X=1)$.

Affirmation 3 : $P(X=1) = 3p - 6p^2 + 3p^3$.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = \int_0^1 e^{nx} dx.$$

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{e^n}{n}.$$

5. On colorie en rouge, jaune ou noir chacune des 16 cases d'un quadrillage.

Affirmation 5 : On peut réaliser $\binom{16}{3}$ coloriages différents.

Corrigé

1. Affirmation 1 : VRAIE.

Sur $]1; +\infty[$, le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée, qu'il faut lever. Le plus efficace ici est de factoriser $x^2 - 1$ sous la racine. Pour tout $x > 1$, on a $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$, donc

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{(x-1)(x+1)} = \sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}.$$

Comme $x - 1 > 0$, on peut écrire $x - 1 = (\sqrt{x - 1})^2$, d'où, après simplification par $\sqrt{x - 1} \neq 0$:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x - 1})^2}{\sqrt{x - 1} \sqrt{x + 1}} = \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}} = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}.$$

Or, pour $x > 1$:

$$\frac{x - 1}{x + 1} = \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, le quotient tend vers $\frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$, et par composition avec la fonction racine carrée, qui est continue en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{1} = 1.$$

L'affirmation 1 est donc **vraie**.

Ce que le correcteur attend : la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ doit être signalée et levée. On peut aussi factoriser par x en haut et sous la racine, en prenant soin d'écrire $\sqrt{x^2} = x$ (et non $-x$)

puisque $x > 0$: $f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \rightarrow 1.$

2. Affirmation 2 : VRAIE.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , la propriété $\mathcal{H}_n$: « $w_n = (n + 1)^2$ » est vraie.

Initialisation. Pour $n = 0$: $w_0 = 1$ par définition, et $(0 + 1)^2 = 1$. Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel quelconque. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie, c'est-à-dire $w_n = (n + 1)^2$. Alors, d'après la relation de récurrence :

$$w_{n+1} = w_n + 2n + 3 = (n + 1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4.$$

Or $n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2 = ((n + 1) + 1)^2$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $w_n = (n + 1)^2$. L'affirmation 2 est **vraie**.

Ce que le correcteur attend : les trois temps de la récurrence explicitement nommés. Vérifier l'égalité sur $w_1 = 1 + 0 + 3 = 4 = 2^2$ et $w_2 = 4 + 2 + 3 = 9 = 3^2$ est un contrôle utile, mais ne constitue pas une démonstration.

3. Affirmation 3 : VRAIE.

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3; p)$. D'après le cours, pour tout entier k compris entre 0 et 3 :

$$P(X = k) = \binom{3}{k} p^k (1 - p)^{3-k}.$$

Avec $k = 1$, et puisque $\binom{3}{1} = 3$:

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} p^1 (1 - p)^2 = 3p(1 - p)^2.$$

On développe l'identité remarquable $(1 - p)^2 = 1 - 2p + p^2$:

$$P(X = 1) = 3p(1 - 2p + p^2) = 3p - 6p^2 + 3p^3.$$

C'est exactement l'expression de l'affirmation : elle est **vraie** (et l'hypothèse $0 < p < 1$ garantit seulement que la loi est non dégénérée ; le calcul, lui, vaut pour tout p).

4. Affirmation 4 : FAUSSE.

Soit n un entier naturel non nul. La fonction $x \mapsto e^{nx}$ est continue sur $[0; 1]$, et comme $n \neq 0$, la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{n} e^{nx}$ en est une primitive : en effet $F'(x) = \frac{1}{n} \times n e^{nx} = e^{nx}$. Donc

$$v_n = \int_0^1 e^{nx} dx = \left[\frac{1}{n} e^{nx} \right]_0^1 = \frac{1}{n} e^n - \frac{1}{n} e^0 = \frac{e^n - 1}{n}.$$

Or $\frac{e^n - 1}{n} \neq \frac{e^n}{n}$, puisque leur différence vaut $-\frac{1}{n} \neq 0$. L'affirmation 4 est donc **fausse**.

Contre-exemple explicite. Pour $n = 1$: $v_1 = e - 1 \approx 1,718$, alors que $\frac{e^1}{1} = e \approx 2,718$. Les deux nombres diffèrent : l'égalité annoncée est fausse dès le premier rang.

Ce que le correcteur attend : le facteur $\frac{1}{n}$ dans la primitive (l'oubli de ce facteur est l'erreur classique), et le terme $-\frac{1}{n}$ venant de la borne inférieure, car $e^0 = 1$ et non 0.

5. Affirmation 5 : FAUSSE.

Colorier le quadrillage, c'est attribuer à chacune des 16 cases l'une des 3 couleurs disponibles : rouge, jaune ou noir. Un coloriage est donc entièrement décrit par la liste ordonnée des couleurs des cases, c'est-à-dire par un 16-uplet de l'ensemble {rouge ; jaune ; noir}. Les cases sont numérotées, donc distinctes, l'ordre compte, et une même couleur peut resservir. D'après le principe multiplicatif, il y a 3 choix pour la première case, 3 pour la deuxième, et ainsi de suite :

$$\underbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}_{16 \text{ facteurs}} = 3^{16} = 43\,046\,721 \text{ coloriages.}$$

Or $\binom{16}{3} = \frac{16 \times 15 \times 14}{3 \times 2 \times 1} = 560$: ce nombre compte les *parties à 3 éléments* d'un ensemble à 16 éléments, c'est-à-dire les façons de choisir 3 cases parmi 16 sans tenir compte de l'ordre. Cela ne décrit pas un coloriage à trois couleurs. Comme $560 \neq 43\,046\,721$, l'affirmation 5 est **fausse**.

Ce que le correcteur attend : distinguer le modèle du p -uplet (choix répétés, ordonnés : n^p) de celui de la combinaison (choix simultanés, non ordonnés : $\binom{n}{p}$). Ici, ce sont les *cases* qui choisissent une couleur, pas les couleurs qui choisissent des cases.

Exercice 3

Sujet — Exercice 3 — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points suivants $A(0; 0; 1)$; $B(1; 2; 3)$; $C(3; 3; 1)$; $E(2; -2; 2)$; $F(3; 0; 4)$ et $G(5; 1; 2)$.

1.a. Montrer que les points B , C et E ne sont pas alignés.

1.b. Justifier que le vecteur $\vec{AF}$ est normal au plan (BCE) .

1.c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BCE) est $x + z - 4 = 0$.

2.a. Montrer que le point G n'appartient pas au plan (BCE) .

2.b. Montrer que les vecteurs $\vec{BE}$, $\vec{BC}$ et $\vec{AG}$ ne sont pas coplanaires.

2.c. En déduire que la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.

Pour la suite de l'exercice, on appellera P le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BCE) .

3.a. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (AG) est :

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3.b. En déduire les coordonnées du point P .

3.c. Montrer que le point P est le milieu du segment $[EC]$.

4. Déterminer l'intersection des plans (BCE) et (ACG) .

Corrigé

1.a. Calculons les coordonnées de deux vecteurs d'origine B :

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{BE} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{BC} = k\vec{BE}$. La première coordonnée imposerait $k = 2$, mais alors la deuxième donnerait $2 \times (-4) = -8 \neq 1$: c'est impossible. Les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{BE}$ ne sont donc pas colinéaires, et les points B , C et E ne sont pas alignés. Ils définissent bien un plan (BCE) .

1.b. On calcule

$$\vec{AF} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-0 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur n'est pas le vecteur nul. Les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{BE}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BCE) d'après la question 1.a; il suffit donc de vérifier que $\vec{AF}$ est orthogonal à chacun

d'eux. Dans un repère orthonormé, le produit scalaire se calcule coordonnée par coordonnée :

$$\vec{AF} \cdot \vec{BC} = 3 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times (-2) = 6 + 0 - 6 = 0,$$

$$\vec{AF} \cdot \vec{BE} = 3 \times 1 + 0 \times (-4) + 3 \times (-1) = 3 + 0 - 3 = 0.$$

Le vecteur $\vec{AF}$, non nul, est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCE) : il est donc orthogonal à tout vecteur directeur de ce plan, c'est-à-dire normal au plan (BCE) .

Ce que le correcteur attend : les deux produits scalaires et le rappel que les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{BE}$ ne sont pas colinéaires. L'orthogonalité à un seul vecteur du plan ne suffirait pas.

1.c. Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Le vecteur $\vec{AF}(3; 0; 3)$ est normal au plan (BCE) ; le vecteur $\vec{n} = \frac{1}{3}\vec{AF}$, de coordonnées $(1; 0; 1)$, lui est colinéaire et non nul, donc lui aussi normal au plan. Une équation cartésienne de (BCE) s'écrit donc

$$x + 0 \times y + z + d = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x + z + d = 0.$$

Le point $B(1; 2; 3)$ appartient au plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$1 + 3 + d = 0 \iff d = -4.$$

Une équation cartésienne du plan (BCE) est donc $x + z - 4 = 0$.

Vérification par les deux autres points : pour $C(3; 3; 1)$, $3 + 1 - 4 = 0$; pour $E(2; -2; 2)$, $2 + 2 - 4 = 0$. Les trois points appartiennent bien au plan d'équation $x + z - 4 = 0$.

2.a. On reporte les coordonnées de $G(5; 1; 2)$ dans le membre de gauche de l'équation du plan (BCE) :

$$5 + 2 - 4 = 3 \neq 0.$$

Les coordonnées de G ne vérifient pas l'équation $x + z - 4 = 0$: le point G n'appartient pas au plan (BCE) .

2.b. On calcule

$$\vec{AG} = \begin{pmatrix} 5 - 0 \\ 1 - 0 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Raisonnons par l'absurde. Si les vecteurs $\vec{BE}$, $\vec{BC}$ et $\vec{AG}$ étaient coplanaires, alors, $\vec{BE}$ et $\vec{BC}$ n'étant pas colinéaires, le vecteur $\vec{AG}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $\vec{BE}$ et $\vec{BC}$: $\vec{AG}$ serait un vecteur directeur du plan (BCE) , donc orthogonal à son vecteur normal $\vec{AF}$. Or

$$\vec{AF} \cdot \vec{AG} = 3 \times 5 + 0 \times 1 + 3 \times 1 = 15 + 0 + 3 = 18 \neq 0.$$

Le vecteur $\vec{AG}$ n'est donc pas orthogonal à $\vec{AF}$: c'est absurde. Par conséquent, les vecteurs $\vec{BE}$, $\vec{BC}$ et $\vec{AG}$ ne sont pas coplanaires.

2.c. Les vecteurs $\vec{BE}$ et $\vec{BC}$ dirigent le plan (BCE) , et le vecteur $\vec{AG}$ dirige la droite (AG) (il est non nul puisque $A \neq G$). Si la droite (AG) était parallèle au plan (BCE) — qu'elle y soit incluse ou non — son vecteur directeur $\vec{AG}$ serait coplanaire avec $\vec{BE}$ et $\vec{BC}$, ce que la question 2.b interdit. La droite (AG) n'est donc pas parallèle au plan (BCE) : elle est sécante à ce plan, qu'elle coupe en un unique point, que l'énoncé nomme P .

3.a. La droite (AG) passe par le point $A(0; 0; 1)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{AG}(5; 1; 1)$. Un point $M(x; y; z)$ appartient à (AG) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{AG}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x - 0 = 5t \\ y - 0 = t \\ z - 1 = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

C'est bien la représentation paramétrique annoncée (pour $t = 0$ on retrouve A , pour $t = 1$ on retrouve $G(5; 1; 2)$).

3.b. Le point P appartient à la droite (AG) : ses coordonnées sont de la forme $(5t; t; 1+t)$ pour un certain réel t . Il appartient aussi au plan (BCE) : ses coordonnées vérifient donc $x + z - 4 = 0$, soit

$$5t + (1+t) - 4 = 0 \iff 6t - 3 = 0 \iff t = \frac{1}{2}.$$

En reportant cette valeur dans la représentation paramétrique :

$$x = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

d'où

$$P\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Vérification : $\frac{5}{2} + \frac{3}{2} - 4 = 4 - 4 = 0$, donc P appartient bien au plan (BCE) .

3.c. Le milieu I du segment $[EC]$ a pour coordonnées les moyennes des coordonnées de $E(2; -2; 2)$ et de $C(3; 3; 1)$:

$$I\left(\frac{x_E + x_C}{2}; \frac{y_E + y_C}{2}; \frac{z_E + z_C}{2}\right) = I\left(\frac{2+3}{2}; \frac{-2+3}{2}; \frac{2+1}{2}\right) = I\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Ces coordonnées sont exactement celles du point P obtenues à la question 3.b : deux points ayant les mêmes coordonnées dans un repère sont confondus, donc $P = I$. Le point P est le milieu du segment $[EC]$.

4. Montrons d'abord que les deux plans sont sécants, puis identifions leur droite d'intersection. Les points $A(0; 0; 1)$, $C(3; 3; 1)$ et $G(5; 1; 2)$ ne sont pas alignés : en effet

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{AG} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas colinéaires (la troisième coordonnée de $\vec{AC}$ est nulle alors que celle de $\vec{AG}$ ne l'est pas). Le plan (ACG) est donc bien défini.

Ces deux plans sont distincts : le point G appartient au plan (ACG) mais pas au plan (BCE) d'après la question 2.a. Or ils ont au moins un point commun, le point C , qui appartient à (BCE) et à (ACG) par construction. Deux plans distincts ayant un point commun sont sécants selon une droite.

Cherchons un second point commun. D'après la question 3.b, le point P appartient au plan (BCE) ; il appartient aussi à la droite (AG) , elle-même incluse dans le plan (ACG) (ce plan contient A et G). Donc P appartient aux deux plans. Comme $P \neq C$ (leurs coordonnées diffèrent), la droite d'intersection des plans (BCE) et (ACG) est la droite (CP) .

Enfin, d'après la question 3.c, P est le milieu de $[EC]$: les points C , P et E sont alignés, et $(CP) = (CE)$. L'intersection des plans (BCE) et (ACG) est donc la droite

$$(CE).$$

Contrôle par le calcul. Un vecteur normal au plan (ACG) est un vecteur $\vec{m}(a; b; c)$ orthogonal à $\vec{AC}$ et à $\vec{AG}$, c'est-à-dire vérifiant $3a + 3b = 0$ et $5a + b + c = 0$: en prenant $a = 1$, on obtient $b = -1$ puis $c = -4$, soit $\vec{m}(1; -1; -4)$. Le plan (ACG) a donc une équation de la forme $x - y - 4z + d = 0$, et $A(0; 0; 1)$ donne $d = 4$: son équation est $x - y - 4z + 4 = 0$ (on

vérifie : pour C , $3 - 3 - 4 + 4 = 0$; pour G , $5 - 1 - 8 + 4 = 0$). Les vecteurs normaux $(1; 0; 1)$ et $(1; -1; -4)$ n'étant pas colinéaires, les plans sont bien sécants. En résolvant le système formé des deux équations, on tire $x = 4 - z$ de la première, puis $(4 - z) - y - 4z + 4 = 0$, soit $y = 8 - 5z$: en posant $z = t$, la droite d'intersection a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 8 - 5t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

qui donne C pour $t = 1$, P pour $t = \frac{3}{2}$ et E pour $t = 2$: c'est bien la droite (CE) .

Ce que le correcteur attend : la réponse « une droite » ne suffit pas, il faut l'identifier ; et le raisonnement « deux plans distincts, deux points communs » exige de justifier que les plans sont *distincts* (c'est le rôle de la question 2.a) et que les deux points communs sont *distincts*.

Exercice 4

Sujet — Exercice 4 — 5 points

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ par :

$$g(x) = x \cos(x) - \sin(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ et on note g' sa dérivée.

1.a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 2\pi]$, on a $g'(x) = -x \sin(x)$.

1.b. On donne le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ ci-dessous. Justifier chacun des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

x	0	π	2π
g	0		2π
		$-\pi$	

1.c. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle α dans l'intervalle $[\pi; 2\pi]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

1.d. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 2\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; 2\pi]$ et on note f' sa dérivée.

2.a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; 2\pi]$ on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

2.b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $]0; 2\pi]$.

2.c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; 2\pi]$.

2.d. Déterminer la limite de f en 0. On pourra utiliser le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient l'inégalité : $0 < r < s < \pi$. Montrer que :

$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}.$$

Corrigé

1.a. La fonction g est la différence du produit $x \mapsto x \cos(x)$ et de la fonction sinus. Pour le produit, posons $u(x) = x$ et $v(x) = \cos(x)$: alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\sin(x)$, et d'après la formule $(uv)' = u'v + uv'$:

$$(x \cos(x))' = 1 \times \cos(x) + x \times (-\sin(x)) = \cos(x) - x \sin(x).$$

La dérivée de la fonction sinus étant la fonction cosinus, on obtient pour tout réel x de $[0; 2\pi]$:

$$g'(x) = \cos(x) - x \sin(x) - \cos(x) = -x \sin(x).$$

1.b. *Signe de la dérivée.* Pour tout x de $[0; 2\pi]$, on a $x \geq 0$, donc $-x \leq 0$: le signe de $g'(x) = -x \sin(x)$ est l'opposé de celui de $\sin(x)$.

- Sur $[0; \pi]$, $\sin(x) \geq 0$, donc $g'(x) \leq 0$. De plus g' ne s'annule qu'en 0 et en π sur cet intervalle : la fonction g est strictement décroissante sur $[0; \pi]$.
- Sur $[\pi; 2\pi]$, $\sin(x) \leq 0$, donc $g'(x) \geq 0$, avec annulation seulement en π et 2π : la fonction g est strictement croissante sur $[\pi; 2\pi]$.

Valeurs aux bornes. On calcule les trois valeurs inscrites dans le tableau, en utilisant $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$, $\cos(2\pi) = 1$ et $\sin(2\pi) = 0$:

$$g(0) = 0 \times 1 - 0 = 0, \quad g(\pi) = \pi \times (-1) - 0 = -\pi, \quad g(2\pi) = 2\pi \times 1 - 0 = 2\pi.$$

Le sens des deux flèches et les trois valeurs 0, $-\pi$ et 2π du tableau sont donc tous justifiés. On note au passage que $-\pi$ est le minimum de g sur $[0; 2\pi]$ et 2π son maximum.

1.c. Plaçons-nous sur l'intervalle $[\pi; 2\pi]$:

- g est dérivable sur $[\pi; 2\pi]$, donc continue sur cet intervalle ;
- g est strictement croissante sur $[\pi; 2\pi]$ d'après la question 1.b ;
- $g(\pi) = -\pi < 0$ et $g(2\pi) = 2\pi > 0$, donc 0 est compris entre $g(\pi)$ et $g(2\pi)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $g(x) = 0$ admet une **unique** solution α dans l'intervalle $[\pi; 2\pi]$.

Localisation. Comme $g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \times 0 - (-1) = 1 > 0$, on a déjà $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. À la calculatrice, $g(4,49) \approx -0,015 < 0$ et $g(4,50) \approx 0,029 > 0$, donc $4,49 < \alpha < 4,50$, soit $\alpha \approx 4,49$ à 10^{-2} près (valeur plus précise : $\alpha \approx 4,4934$).

Ce que le correcteur attend : les trois hypothèses citées et le nom du théorème ; la continuité vient de la dérivabilité admise, l'existence du théorème des valeurs intermédiaires et l'unicité de la stricte croissance. Attention : sur $[0; 2\pi]$ tout entier, g s'annule *deux* fois (en 0 et en α) ; c'est bien sur $[\pi; 2\pi]$ que l'unicité est demandée.

1.d. Sur $[0; \pi]$, g est strictement décroissante et $g(0) = 0$, donc $g(x) < 0$ pour tout x de $]0; \pi]$. Sur $[\pi; 2\pi]$, g est strictement croissante et s'annule uniquement en α , donc $g(x) < 0$ sur $[\pi; \alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $] \alpha; 2\pi]$. En rassemblant :

x	0		α		2π
$g(x)$	0	−	0	+	

Autrement dit : $g(0) = g(\alpha) = 0$, g est strictement négative sur $]0; \alpha[$ et strictement positive sur $] \alpha; 2\pi]$.

2.a. Sur $]0; 2\pi]$, on a $x \neq 0$: la fonction f est le quotient $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x$, donc $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = 1$. D'après la formule de dérivation d'un quotient, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Or, par définition, $g(x) = x \cos(x) - \sin(x)$. Donc, pour tout réel x de $]0; 2\pi]$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

2.b. Pour tout x de $]0; 2\pi]$, $x \neq 0$ donc $x^2 > 0$: le quotient $\frac{g(x)}{x^2}$ est du signe de son numérateur. La fonction f' a donc exactement le signe de g trouvé à la question 1.d :

$$f'(x) < 0 \text{ sur }]0; \alpha[, \quad f'(\alpha) = 0, \quad f'(x) > 0 \text{ sur }]\alpha; 2\pi].$$

2.c. Une fonction dérivable dont la dérivée est strictement négative sur un intervalle y est strictement décroissante, et strictement croissante là où sa dérivée est strictement positive ; la dérivée f' ne s'annulant qu'au seul point α , le sens de variation s'étend à cette borne. Donc :

- f est strictement décroissante sur $]0; \alpha]$;
- f est strictement croissante sur $[\alpha; 2\pi]$.

La fonction f admet ainsi un minimum sur $]0; 2\pi]$, atteint en α . On peut même en donner la valeur : comme $g(\alpha) = 0$, on a $\alpha \cos(\alpha) = \sin(\alpha)$, et en divisant par $\alpha \neq 0$:

$$f(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \cos(\alpha) \approx -0,217.$$

2.d. Pour tout x de $]0; 2\pi]$, comme $\sin(0) = 0$:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}.$$

On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction sinus entre 0 et x . La fonction sinus est dérivable en 0, donc ce taux d'accroissement tend, quand x tend vers 0, vers le nombre dérivé de la fonction sinus en 0, à savoir $\cos(0) = 1$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Remarque. La fonction f n'est pas définie en 0, mais elle se prolonge par continuité en posant $f(0) = 1$; la courbe de f « arrive » donc au point de coordonnées $(0; 1)$, puis descend jusqu'au minimum $\cos(\alpha) \approx -0,217$ avant de remonter vers $f(2\pi) = 0$.

3. Soient r et s deux réels tels que $0 < r < s < \pi$.

D'après la question 1.c, $\alpha > \pi$: l'intervalle $]0; \pi]$ est donc inclus dans $]0; \alpha]$, intervalle sur lequel la fonction f est strictement décroissante (question 2.c). Les réels r et s appartiennent à $]0; \pi[$, donc à $]0; \alpha]$, et $r < s$: la stricte décroissance donne

$$f(r) > f(s), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\sin(r)}{r} > \frac{\sin(s)}{s}.$$

Multiplions les deux membres par le réel rs , strictement positif : le sens de l'inégalité est conservé et

$$s \sin(r) > r \sin(s).$$

Enfin, $0 < s < \pi$ donc $\sin(s) > 0$, et $s > 0$: le produit $s \sin(s)$ est strictement positif. En divisant les deux membres par $s \sin(s)$, le sens de l'inégalité est encore conservé :

$$\frac{s \sin(r)}{s \sin(s)} > \frac{r \sin(s)}{s \sin(s)}, \quad \text{soit} \quad \frac{\sin(r)}{\sin(s)} > \frac{r}{s}.$$

On a donc bien, pour tous réels r et s tels que $0 < r < s < \pi$:

$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}.$$

Ce que le correcteur attend : deux points de vigilance. D'une part, il faut justifier que $]0; \pi]$ est bien contenu dans la zone de décroissance de f , ce qui demande de savoir que $\alpha > \pi$ (c'est acquis puisque $\alpha \in [\pi; 2\pi]$ et $g(\pi) = -\pi \neq 0$). D'autre part, chaque multiplication ou division doit être faite par un nombre dont le signe est *établi* : c'est la stricte positivité de $\sin(s)$ sur $]0; \pi[$ qui autorise la dernière étape, et elle serait fautive pour $s > \pi$.