

Mathématiques

Baccalauréat général 2026 — épreuve de spécialité

Asie, session 2026 (26-MATJ2JA1)

Corrigé

Quatre exercices

Exercice 1

Sujet — Exercice 1 — 5 points

Partie A On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$.

1. Justifier tous les éléments du tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$
f	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

2. En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$, on a :

$$f(x) \in [0; 1].$$

Partie B On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n - 3}, \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. En utilisant la fonction f , démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On note l la limite de la suite (u_n) .

En admettant que l est solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; 1]$, montrer que $l = 1$.

4. On donne ci-dessous une fonction `seuil` écrite en langage Python.

```
def seuil(h):  
    n=0  
    u=0  
    while u<1-h:  
        n=n+1  
        u=(u-2)/(2*u-3)  
    return n
```

L'appel `seuil(0.0001)` renvoie la valeur 5 000.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

5.a. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n) sous forme de fractions irréductibles.

5.b. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture.

Corrigé

Partie A 1. Il y a quatre éléments à justifier : l'ensemble de définition, le sens de variation, et les deux valeurs aux bornes.

Ensemble de définition. Le dénominateur s'annule pour $2x - 3 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{3}{2}$: la fonction f , quotient de deux fonctions affines, est bien définie et dérivable sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$.

Sens de variation. On applique la formule de dérivation d'un quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = x - 2$ ($u'(x) = 1$) et $v(x) = 2x - 3$ ($v'(x) = 2$) :

$$f'(x) = \frac{1 \times (2x - 3) - (x - 2) \times 2}{(2x - 3)^2} = \frac{2x - 3 - 2x + 4}{(2x - 3)^2} = \frac{1}{(2x - 3)^2}.$$

Pour tout $x < \frac{3}{2}$, on a $(2x - 3)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$: la fonction f est **strictement croissante** sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$, ce qui justifie la flèche montante.

Limite en $-\infty$. Le quotient présente la forme indéterminée « $\frac{-\infty}{-\infty}$ » ; on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur :

$$f(x) = \frac{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{x \left(2 - \frac{3}{x}\right)} = \frac{1 - \frac{2}{x}}{2 - \frac{3}{x}}.$$

Comme $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{3}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$, on obtient par quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

Limite en $\frac{3}{2}$ à gauche. On a $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} (x - 2) = -\frac{1}{2} < 0$; de plus, pour $x < \frac{3}{2}$, $2x - 3 < 0$, donc

$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} (2x - 3) = 0^-$. Le quotient d'une quantité strictement négative par une quantité négative tendant vers 0 tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = +\infty.$$

La droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est asymptote verticale à la courbe de f : c'est la double barre du tableau. Les deux nombres $\frac{1}{2}$ et $+\infty$ inscrits dans le tableau sont des *limites*, non des valeurs prises par f .

2. L'intervalle $[0; 1]$ est inclus dans $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$ car $1 < \frac{3}{2}$. La fonction f y est croissante, donc pour tout $x \in [0; 1]$:

$$0 \leq x \leq 1 \implies f(0) \leq f(x) \leq f(1).$$

Or

$$f(0) = \frac{0 - 2}{0 - 3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{1 - 2}{2 - 3} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Ainsi $\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1$, et comme $\left[\frac{2}{3}; 1\right] \subset [0; 1]$, on a bien $f(x) \in [0; 1]$ pour tout $x \in [0; 1]$.

Partie B Observons d'abord que la relation de récurrence s'écrit, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$, puisque $\frac{u_n - 2}{2u_n - 3}$ est exactement l'image de u_n par f .

1. Démontrons par récurrence la propriété $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ ».

Initialisation. On a $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{2}{3}$ d'après la question 2 de la partie A.

Comme $0 \leq 0 \leq \frac{2}{3} \leq 1$, la propriété $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier naturel n fixé, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Les réels u_n et u_{n+1} appartiennent donc à $[0; 1]$, intervalle sur lequel f est croissante. En appliquant f à la chaîne d'inégalités $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$, on obtient :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1.$$

Comme $0 \leq \frac{2}{3}$, il vient $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$: la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
Ce que le correcteur attend : la croissance de f ne donne que l'inégalité $u_{n+1} \leq u_{n+2}$; c'est l'encadrement $0 \leq \cdot \leq 1$ de la question A.2 (ou le calcul de $f(0)$ et $f(1)$) qui assure que les termes restent dans $[0; 1]$ et permet donc de réappliquer l'hypothèse au rang suivant.

2. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est **croissante** ; et $u_n \leq 1$: elle est **majorée** par 1. D'après le théorème de convergence monotone, toute suite croissante et majorée converge : la suite (u_n) converge vers un réel l , avec $l \leq 1$.

3. On admet que l est solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[0; 1]$. Résolvons cette équation. Pour $x \in [0; 1]$, on a $2x - 3 \leq 2 - 3 = -1 \neq 0$: on peut donc multiplier les deux membres par $2x - 3$.

$$\frac{x-2}{2x-3} = x \iff x-2 = x(2x-3) \iff x-2 = 2x^2-3x \iff 2x^2-4x+2=0.$$

En divisant par 2 puis en reconnaissant une identité remarquable :

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

L'équation $f(x) = x$ admet donc pour unique solution $x = 1$ sur $[0; 1]$. Comme l est solution de cette équation, $l = 1$.

4. La fonction **seuil** part de **n** = 0 et **u** = $u_0 = 0$, puis répète le calcul **u** ← $f(\mathbf{u})$ en incrémentant **n** tant que **u** < $1 - \mathbf{h}$: à la sortie de la boucle, **u** vaut u_n et **n** est le *plus petit* rang n tel que $u_n \geq 1 - h$.

Ainsi **seuil**(0.0001) = 5 000 signifie que 5 000 est le premier rang à partir duquel les termes de la suite dépassent $1 - 10^{-4} = 0,9999$:

$$u_{4999} < 0,9999 \leq u_{5000}.$$

Comme la suite est croissante de limite 1, on a $u_n \leq 1$ pour tout n , donc pour tout $n \geq 5\,000$: $1 - u_n \leq 10^{-4}$. Autrement dit, il faut attendre le rang 5 000 pour que u_n approche sa limite 1 à 10^{-4} près : la convergence est très lente.

5.a. On calcule les termes de proche en proche :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = f(0) = \frac{0-2}{0-3} = \frac{2}{3},$$

$$u_2 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}-2}{2 \times \frac{2}{3}-3} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}, \quad u_3 = f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\frac{4}{5}-2}{2 \times \frac{4}{5}-3} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{7}{5}} = \frac{6}{7}.$$

Les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ et $\frac{6}{7}$ sont irréductibles (deux entiers consécutifs, ou de différence 1, n'ont pas de diviseur commun autre que 1).

5.b. En écrivant $u_0 = \frac{0}{1}$, les quatre premiers termes sont

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{6}{7} :$$

le numérateur est le double du rang et le dénominateur vaut un de plus. On conjecture donc que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2n}{2n+1}.$$

Démontrons cette conjecture par récurrence. Soit $Q(n)$ la propriété « $u_n = \frac{2n}{2n+1}$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$: $\frac{2 \times 0}{2 \times 0 + 1} = \frac{0}{1} = 0 = u_0$. La propriété $Q(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $Q(n)$ vraie pour un entier naturel n fixé. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n - 3} = \frac{\frac{2n}{2n+1} - 2}{2 \times \frac{2n}{2n+1} - 3}.$$

On réduit séparément le numérateur et le dénominateur au même dénominateur $2n+1$:

$$\frac{2n}{2n+1} - 2 = \frac{2n - 2(2n+1)}{2n+1} = \frac{-2n-2}{2n+1}, \quad \frac{4n}{2n+1} - 3 = \frac{4n - 3(2n+1)}{2n+1} = \frac{-2n-3}{2n+1}.$$

Le facteur $\frac{1}{2n+1}$, non nul, se simplifie dans le quotient :

$$u_{n+1} = \frac{-2n-2}{-2n-3} = \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}.$$

La propriété $Q(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{2n}{2n+1}$.

Cohérence avec les questions précédentes. On a $1 - u_n = \frac{2n+1-2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$, qui tend vers 0 : on retrouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 = l$. De plus

$$u_n \geq 1 - 10^{-4} \iff \frac{1}{2n+1} \leq 10^{-4} \iff 2n+1 \geq 10\,000 \iff n \geq 4\,999,5,$$

soit $n \geq 5\,000$: on retrouve exactement la valeur renvoyée par la fonction `seuil`.

Exercice 2

Sujet — Exercice 2 — 5 points

On pourra traiter indépendamment les deux parties de l'exercice.

On arrondira, si nécessaire, les résultats à 10^{-3} près.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux lancers-francs effectués par un joueur lors de compétitions de basketball. Pour modéliser la situation, on considère dans chaque partie du problème que les conditions dans lesquelles s'effectuent ces lancers sont identiques et que ces lancers sont indépendants deux à deux.

Partie A Les statistiques de réussite des lancers-francs d'un joueur sont de 49,2 % lors d'une saison. Dans cette partie, on assimilera cette fréquence à sa probabilité de réussite d'un lancer-franc.

Au cours d'un match, ce joueur tente 16 lancers-francs.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers-francs réussis par ce joueur lors de ce match.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et l'interpréter dans le contexte de cet exercice.
3. Calculer $P(X = 5)$.
4. Calculer la probabilité que le joueur réussisse au moins six lancers-francs.

Partie B On note p la probabilité que le joueur réussisse un lancer-franc, où p est un réel tel que $0 \leq p \leq 1$.

On se place dans le cas où le joueur effectue 3 lancers-francs.

On désigne par Y la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers-francs réussis par ce joueur.

1. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y .
2. Exprimer $P(Y = 2)$ en fonction de p .
3. Donner la loi de probabilité de Y . Présenter la réponse sous forme de tableau.
4. Montrer que $P(Y \geq 2) = -2p^3 + 3p^2$.
5. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2.$$

- 5.a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$ et dresser son tableau de variation en y faisant figurer les valeurs aux bornes de l'intervalle $[0; 1]$.
- 5.b. En déduire l'existence d'une unique valeur α dans l'intervalle $[0; 1]$ telle que $f(\alpha) = 0,9$.
- 5.c. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette valeur α .
- 5.d. Interpréter la valeur de α dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Partie A 1. Chaque lancer-franc constitue une épreuve de Bernoulli : il n'a que deux issues, le succès « le lancer-franc est réussi », de probabilité $p = 0,492$, et l'échec « le lancer-franc est manqué », de probabilité $1 - p = 0,508$.

Le joueur tente 16 lancers-francs dans des conditions identiques et indépendants deux à deux : on répète donc 16 fois, de façon identique et indépendante, la même épreuve de Bernoulli. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 16$ et $p = 0,492$.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès de ce schéma : elle suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 16$ et $p = 0,492$, ce que l'on note $X \sim \mathcal{B}(16; 0,492)$. L'ensemble des valeurs prises par X est $\llbracket 0, 16 \rrbracket$.

2. Si $X \sim \mathcal{B}(n; p)$, alors $E(X) = np$. Ici :

$$E(X) = 16 \times 0,492 = 7,872.$$

Interprétation. Sur un très grand nombre de matchs au cours desquels ce joueur tente 16 lancers-francs, il en réussira en moyenne 7,872 par match, soit un peu moins de 8.

3. D'après la formule de la loi binomiale, pour tout entier $k \in \llbracket 0, 16 \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{16}{k} 0,492^k 0,508^{16-k}$. Pour $k = 5$:

$$P(X = 5) = \binom{16}{5} \times 0,492^5 \times 0,508^{11} = 4368 \times 0,492^5 \times 0,508^{11}.$$

À la calculatrice, $P(X = 5) = 0,073216 \dots$, soit

$$P(X = 5) \approx 0,073.$$

4. L'événement « le joueur réussit au moins six lancers-francs » est $(X \geq 6)$. Son événement contraire est $(X < 6)$, c'est-à-dire $(X \leq 5)$ puisque X ne prend que des valeurs entières. Donc :

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5).$$

À la calculatrice, $P(X \leq 5) = 0,117261 \dots$, d'où

$$P(X \geq 6) = 1 - 0,117261 \dots = 0,882738 \dots \approx 0,883.$$

Le joueur a donc environ 88,3 % de chances de réussir au moins six lancers-francs sur les seize tentés.

Ce que le correcteur attend : le passage à l'événement contraire avec la bonne borne. Écrire $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 6)$ est l'erreur classique ; elle retranche à tort le terme $P(X = 6) = \binom{16}{6} 0,492^6 0,508^{10} \approx 0,130$ et conduirait à 0,753 au lieu de 0,883.

Partie B 1. Le joueur effectue 3 lancers-francs et Y compte le nombre de réussites : Y peut valoir 0, 1, 2 ou 3. L'ensemble des valeurs prises par Y est donc $\{0; 1; 2; 3\}$.

2. Pour les mêmes raisons qu'en partie A, Y suit la loi binomiale de paramètres 3 et p , soit $Y \sim \mathcal{B}(3; p)$. L'événement $(Y = 2)$ correspond aux chemins de l'arbre comportant exactement deux succès et un échec : il y en a $\binom{3}{2} = 3$ (le lancer manqué est le premier, le deuxième ou le troisième), et chacun a pour probabilité $p^2(1 - p)$ par indépendance. Donc :

$$P(Y = 2) = \binom{3}{2} p^2(1 - p) = 3p^2(1 - p) = 3p^2 - 3p^3.$$

3. De la même façon, $P(Y = k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}$ pour $k \in \{0; 1; 2; 3\}$, avec $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ et $\binom{3}{3} = 1$. D'où la loi de probabilité de Y :

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

Vérification : la somme des quatre probabilités vaut $((1-p) + p)^3 = 1$ d'après la formule du binôme, comme il se doit.

4. Les événements $(Y = 2)$ et $(Y = 3)$ sont incompatibles et leur réunion est $(Y \geq 2)$:

$$P(Y \geq 2) = P(Y = 2) + P(Y = 3) = 3p^2(1-p) + p^3 = 3p^2 - 3p^3 + p^3 = -2p^3 + 3p^2.$$

5.a. La fonction f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $[0; 1]$, et pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = -2 \times 3x^2 + 3 \times 2x = -6x^2 + 6x = 6x(1-x).$$

Sur $[0; 1]$, on a $x \geq 0$ et $1-x \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$; de plus $f'(x) = 0$ uniquement en $x = 0$ et $x = 1$, c'est-à-dire aux bornes. La fonction f est donc **strictement croissante** sur $[0; 1]$. Les valeurs aux bornes sont :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = -2 \times 1 + 3 \times 1 = 1.$$

x	0	1
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	$\nearrow$ 1

5.b. La fonction f est continue sur $[0; 1]$ (car dérivable, et parce que c'est une fonction polynôme) et strictement croissante sur $[0; 1]$ d'après la question précédente, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Or $0 < 0,9 < 1$, c'est-à-dire que 0,9 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 0,9$ admet une **unique** solution α dans l'intervalle $[0; 1]$.

Ce que le correcteur attend : les trois hypothèses doivent être citées explicitement — continuité, stricte monotonie, valeur cible comprise entre les images des bornes. Le théorème des valeurs intermédiaires seul donnerait l'existence, mais pas l'unicité : c'est la stricte croissance qui l'apporte.

5.c. Un encadrement d'amplitude 10^{-2} s'obtient par deux centièmes consécutifs; on calcule à la calculatrice les images de 0,80 et de 0,81 :

$$f(0,8) = -2 \times 0,8^3 + 3 \times 0,8^2 = -2 \times 0,512 + 3 \times 0,64 = -1,024 + 1,92 = 0,896 < 0,9,$$

$$f(0,81) = -2 \times 0,81^3 + 3 \times 0,81^2 = -1,062882 + 1,9683 = 0,905418 > 0,9.$$

Ainsi $f(0,80) < 0,9 < f(0,81)$. Comme f est strictement croissante sur $[0; 1]$, on en déduit :

$$0,80 < \alpha < 0,81,$$

encadrement d'amplitude $0,81 - 0,80 = 10^{-2}$, comme demandé. (À la calculatrice, $\alpha = 0,80419 \dots \approx 0,8042$.)

5.d. D'après la question 4, pour une probabilité de réussite p d'un lancer-franc, la probabilité que le joueur réussisse au moins deux lancers-francs sur trois vaut $-2p^3 + 3p^2 = f(p)$. Le réel α est donc la valeur de p pour laquelle cette probabilité vaut exactement 0,9.

Autrement dit : pour que le joueur ait 90 % de chances de réussir au moins deux lancers-francs sur trois, il faut que sa probabilité de réussite à un lancer-franc soit égale à α , c'est-à-dire comprise entre 80 % et 81 %. Et comme f est croissante, une probabilité de réussite $p \geq \alpha$ garantit $P(Y \geq 2) \geq 0,9$. Le joueur de la partie A, dont la fréquence de réussite est de 49,2 %, en est très loin.

Exercice 3

Sujet — Exercice 3 — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(1; 2; 3), \quad B(-1; 3; 1), \quad C(2; 1; 6) \quad \text{et} \quad D(3; -2; -1).$$

- 1.a. Montrer que les points A , B et C définissent un plan.
 - 1.b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; 4; 1)$ est normal au plan (ABC) .
 - 1.c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - 2.a. Déterminer une équation paramétrique de la droite (d) , perpendiculaire au plan (ABC) et passant par le point D .
 - 2.b. Déterminer les coordonnées du point H qui est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) .
 - 2.c. En déduire que la distance du point D au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{2}$.
 - 3.a. Montrer que $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$.
 - 3.b. En déduire la valeur exacte de $\sin(\widehat{BAC})$.
 - 3.c. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
 4. Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.
- On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h,$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur qui lui est associée.

Corrigé

1.a. Trois points définissent un plan si et seulement s'ils ne sont pas alignés, c'est-à-dire si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires. Calculons leurs coordonnées :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1-1 \\ 3-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

S'il existait un réel λ tel que $\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$, la première coordonnée donnerait $-2 = \lambda$ et la deuxième $1 = -\lambda$, soit $\lambda = -1$: c'est contradictoire. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont donc pas colinéaires : les points A , B et C ne sont pas alignés et définissent bien un plan (ABC) .

1.b. Un vecteur non nul est normal à un plan s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan. Le repère étant orthonormé, on calcule les produits scalaires avec

l'expression analytique :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times (-2) + 4 \times 1 + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0,$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 \times 1 + 4 \times (-1) + 1 \times 3 = 1 - 4 + 3 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$, qui est non nul, est donc orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ du plan (ABC) : c'est un vecteur normal au plan (ABC) .

1.c. D'après le théorème sur l'équation cartésienne d'un plan, comme $\vec{n}(1; 4; 1)$ est normal à (ABC) , ce plan admet une équation cartésienne de la forme

$$x + 4y + z + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Le point $A(1; 2; 3)$ appartient à ce plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$1 + 4 \times 2 + 3 + d = 0 \iff 12 + d = 0 \iff d = -12.$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc :

$$x + 4y + z - 12 = 0.$$

Vérification par les deux autres points : pour $B(-1; 3; 1)$, $-1 + 12 + 1 - 12 = 0$; pour $C(2; 1; 6)$, $2 + 4 + 6 - 12 = 0$. Les trois points vérifient bien l'équation.

2.a. La droite (d) est perpendiculaire au plan (ABC) : elle admet donc pour vecteur directeur tout vecteur normal à ce plan, en particulier $\vec{n}(1; 4; 1)$. Elle passe par $D(3; -2; -1)$. Un point $M(x; y; z)$ appartient à (d) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\vec{DM} = t\vec{n}$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2.b. Par définition, le projeté orthogonal H de D sur le plan (ABC) est le point d'intersection de ce plan avec la droite passant par D et perpendiculaire au plan, c'est-à-dire avec la droite (d) . On cherche donc le réel t pour lequel le point de (d) de paramètre t vérifie l'équation du plan :

$$(3 + t) + 4(-2 + 4t) + (-1 + t) - 12 = 0 \iff 3 + t - 8 + 16t - 1 + t - 12 = 0,$$

$$\text{soit} \quad 18t - 18 = 0 \iff t = 1.$$

En reportant $t = 1$ dans la représentation paramétrique :

$$x_H = 3 + 1 = 4, \quad y_H = -2 + 4 = 2, \quad z_H = -1 + 1 = 0,$$

d'où $H(4; 2; 0)$.

Vérification : $4 + 4 \times 2 + 0 - 12 = 0$: le point H appartient bien au plan (ABC) .

2.c. La distance du point D au plan (ABC) est la distance de D à son projeté orthogonal H sur ce plan (c'est le point du plan le plus proche de D). Or :

$$D\vec{H} \begin{pmatrix} 4 - 3 \\ 2 - (-2) \\ 0 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$DH = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}.$$

La distance du point D au plan (ABC) est donc bien égale à $3\sqrt{2}$ (soit environ 4,24).

3.a. L'angle $\widehat{BAC}$ est l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. D'après l'expression du produit scalaire à l'aide du cosinus :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

Calculons chacun des trois éléments. Avec l'expression analytique :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-2) \times 1 + 1 \times (-1) + (-2) \times 3 = -2 - 1 - 6 = -9,$$

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}.$$

Comme $AB \times AC = 3\sqrt{11} \neq 0$:

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{-9}{3\sqrt{11}} = -\frac{3}{\sqrt{11}} = -\frac{3\sqrt{11}}{\sqrt{11} \times \sqrt{11}} = -\frac{3\sqrt{11}}{11}.$$

Remarque : le cosinus est négatif, donc l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus ($\widehat{BAC} \approx 154,8^\circ$).

3.b. D'après la relation fondamentale de la trigonométrie, $\cos^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1$, donc :

$$\sin^2(\widehat{BAC}) = 1 - \left(-\frac{3\sqrt{11}}{11}\right)^2 = 1 - \frac{9 \times 11}{121} = 1 - \frac{99}{121} = \frac{22}{121}.$$

L'angle géométrique $\widehat{BAC}$ appartient à $[0; \pi]$, intervalle sur lequel le sinus est positif. On en déduit la valeur exacte :

$$\sin(\widehat{BAC}) = \sqrt{\frac{22}{121}} = \frac{\sqrt{22}}{11}.$$

Ce que le correcteur attend : l'équation $\sin^2 = \frac{22}{121}$ a deux solutions ; c'est l'appartenance de l'angle géométrique à $[0; \pi]$ qui impose de retenir la racine positive.

3.c. L'aire d'un triangle est le demi-produit de deux côtés par le sinus de l'angle qu'ils forment :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{11} \times \frac{\sqrt{22}}{11}.$$

Or $\sqrt{11} \times \sqrt{22} = \sqrt{242} = \sqrt{121 \times 2} = 11\sqrt{2}$, donc :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{11\sqrt{2}}{11} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

L'aire du triangle ABC vaut donc bien $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ unité d'aire (soit environ 2,12).

4. Prenons le triangle ABC comme base du tétraèdre $ABCD$. La hauteur qui lui est associée est alors la distance du quatrième sommet D au plan (ABC) , calculée à la question **2.c** :

$h = 3\sqrt{2}$. L'aire de la base est $\mathcal{B} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ d'après la question **3.c**. La formule rappelée donne :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3 \times (\sqrt{2})^2}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 2}{2} = \frac{9}{3} = 3.$$

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est égal à 3 unités de volume.

Ce que le correcteur attend : la cohérence entre la base choisie et la hauteur utilisée. La hauteur associée à la base ABC est la distance de D au plan (ABC) , et non l'une des longueurs DA , DB ou DC : c'est précisément ce que fournit le projeté orthogonal H de la question **2.b**.

Exercise 4

Sujet — Exercice 4 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre choix. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

Les quatre questions sont indépendantes.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

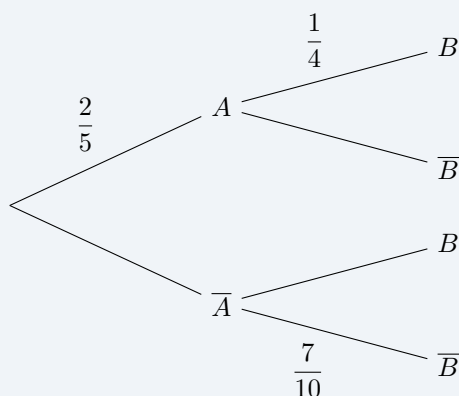
$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^5.$$

Affirmation 1 : La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Une urne contient 32 jetons numérotés de 1 à 32 indiscernables au toucher. On tire simultanément 5 jetons de cette urne. On appelle tirage la liste non ordonnée des numéros des cinq jetons tirés.

Affirmation 2 : Le nombre de tirages possibles contenant au moins un multiple de 8 est égal à 103 096.

3. On considère l'arbre de probabilités ci-dessous.



Affirmation 3 : $P_B(\overline{A}) = \frac{9}{50}$.

4. On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = e^{-x} \cos(x),$$

où y est une fonction de la variable x , dérivable sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 4 : La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x} \sin(x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5 : Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$k(x) = C e^{-x} \sin(x) \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Corrigé

1. L'affirmation 1 est FAUSSE.

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction affine $u : x \mapsto -\frac{1}{2}x + 3$ (de dérivée $u'(x) = -\frac{1}{2}$) et de la fonction $t \mapsto t^5$. D'après la formule $(u^n)' = n u' u^{n-1}$:

$$f'(x) = 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^4 = -\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^4,$$

puis

$$f''(x) = -\frac{5}{2} \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^3 = 5 \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^3.$$

La fonction cube conservant le signe, $f''(x)$ est du signe de $-\frac{1}{2}x + 3$. Or

$$-\frac{1}{2}x + 3 \geq 0 \iff 3 \geq \frac{1}{2}x \iff x \leq 6.$$

Ainsi $f''(x) \geq 0$ sur $] -\infty ; 6]$ et $f''(x) < 0$ sur $]6 ; +\infty[$. La fonction f est donc convexe sur $] -\infty ; 6]$ et concave sur $]6 ; +\infty[$: elle n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier. Le point de la courbe d'abscisse 6 est d'ailleurs un point d'inflexion, puisque f'' s'y annule en changeant de signe.

Contre-exemple explicite : $f''(8) = 5 \times (-4 + 3)^3 = 5 \times (-1)^3 = -5 < 0$, donc la condition « $f''(x) \geq 0$ pour tout réel x » de la caractérisation de la convexité est mise en défaut.

2. L'affirmation 2 est VRAIE.

Un tirage est une liste non ordonnée de 5 numéros deux à deux distincts choisis parmi 32 : c'est une combinaison de 5 éléments d'un ensemble à 32 éléments. Le nombre total de tirages est donc :

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{24\,165\,120}{120} = 201\,376.$$

Les multiples de 8 compris entre 1 et 32 sont 8, 16, 24 et 32 : il y en a 4, et les $32 - 4 = 28$ autres jetons n'en sont pas.

Passons par l'événement contraire : un tirage ne contient aucun multiple de 8 si et seulement si ses cinq numéros sont choisis parmi les 28 jetons restants, ce qui donne :

$$\binom{28}{5} = \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24}{120} = \frac{11\,793\,600}{120} = 98\,280.$$

Le nombre de tirages contenant au moins un multiple de 8 est donc :

$$\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 201\,376 - 98\,280 = 103\,096.$$

C'est bien la valeur annoncée.

Ce que le correcteur attend : le passage par le complémentaire. Compter directement « au moins un multiple de 8 » en écrivant $4 \times \binom{31}{4}$ compterait plusieurs fois les tirages contenant deux multiples de 8 ou davantage.

3. L'affirmation 3 est FAUSSE.

L'arbre donne les probabilités suivantes :

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P_A(B) = \frac{1}{4}, \quad P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{7}{10}.$$

On en déduit d'abord les deux probabilités manquantes utiles :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}, \quad P_{\bar{A}}(B) = 1 - P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

Les probabilités des deux chemins menant à B s'obtiennent en multipliant le long de chaque chemin :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10},$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_A(B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{50}.$$

Les événements A et $\bar{A}$ formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{10} + \frac{9}{50} = \frac{5}{50} + \frac{9}{50} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}.$$

Comme $P(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle demandée vaut :

$$P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{14}{50}} = \frac{9}{14} \approx 0,643.$$

Or $\frac{9}{14} \neq \frac{9}{50}$: l'affirmation est fausse.

Ce que le correcteur attend : la valeur $\frac{9}{50}$ est bien celle de $P(\bar{A} \cap B)$, probabilité du *chemin* du bas menant à B . La confusion entre la probabilité d'une intersection (produit le long d'un chemin) et une probabilité conditionnelle (quotient par $P(B)$) est exactement le piège tendu ici.

4. L'affirmation 4 est VRAIE.

La fonction $h : x \mapsto e^{-x} \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Avec $(uv)' = u'v + uv'$, où $u(x) = e^{-x}$ ($u'(x) = -e^{-x}$) et $v(x) = \sin(x)$ ($v'(x) = \cos(x)$) :

$$h'(x) = -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x).$$

Donc, pour tout réel x :

$$h'(x) + h(x) = -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x) + e^{-x} \sin(x) = e^{-x} \cos(x).$$

La fonction h vérifie donc l'équation (E) en tout point de $\mathbb{R}$: c'est bien une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

L'affirmation 5 est FAUSSE.

Soit C un réel et $k : x \mapsto C e^{-x} \sin(x)$. Comme $k = C h$ et que la dérivation est linéaire, le calcul précédent donne, pour tout réel x :

$$k'(x) + k(x) = C(h'(x) + h(x)) = C e^{-x} \cos(x).$$

Pour que k soit solution de (E), il faudrait que $C e^{-x} \cos(x) = e^{-x} \cos(x)$ pour tout réel x , donc (en $x = 0$, où $e^0 \cos(0) = 1$) que $C = 1$. *Contre-exemple explicite* : pour $C = 0$, la fonction nulle vérifie $k' + k = 0$, alors que $e^{-x} \cos(x)$ vaut 1 en 0 : la fonction nulle n'est pas solution de (E). Les fonctions proposées ne sont donc pas toutes solutions.

Les solutions de (E). L'équation s'écrit $y' = -y + e^{-x} \cos(x)$. Une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de l'équation homogène associée $y' + y = 0$, c'est-à-dire $y' = -y$; en effet, $(g - h)' + (g - h) = (g' + g) - (h' + h)$, qui est nul si et seulement si $g' + g = e^{-x} \cos(x)$. Or les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto C e^{ax}$, ici avec $a = -1$. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto e^{-x} \sin(x) + C e^{-x} = e^{-x} (\sin(x) + C), \quad C \in \mathbb{R},$$

et non les fonctions $x \mapsto C e^{-x} \sin(x)$. Les deux familles ne coïncident que pour $C = 1$.

Ce que le correcteur attend : la solution générale d'une équation différentielle avec second membre est la somme d'une solution particulière et de toutes les solutions de l'équation homogène ; la constante s'ajoute, elle ne multiplie pas la solution particulière.