

Mathématiques

Baccalauréat général 2026 — épreuve de spécialité

Métropole, mardi 16 juin 2026 (26-MATJ1ME1)

Corrigé

Quatre exercices

Exercice 1

Sujet — Exercice 1 — 5 points

Un navire assure la liaison entre deux ports de la Méditerranée. Lors d'une traversée, une famille a la possibilité de réserver une cabine ainsi qu'un emplacement pour un véhicule.

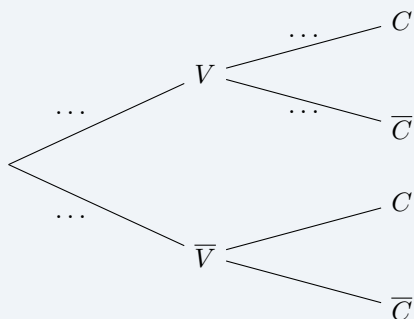
Partie A Parmi l'ensemble des familles effectuant la traversée, on constate que 30 % réservent un emplacement pour un véhicule et, parmi ces dernières, 80 % réservent une cabine.

On sait par ailleurs que 75 % des familles effectuant la traversée réservent une cabine.

On choisit au hasard une famille effectuant la traversée, et on considère les événements suivants :

- V : « la famille réserve un emplacement pour un véhicule » ;
- C : « la famille réserve une cabine ».

Pour un événement quelconque E , on désigne par $\bar{E}$ son événement contraire et par $P(E)$ sa probabilité.



1.a. Donner $P(C)$.

1.b. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les quatre pointillés.

2. Calculer la probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine.

3. Une famille a réservé une cabine. Déterminer la probabilité qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule.

4. Déterminer $P_{\bar{V}}(C)$. On arrondira le résultat à 10^{-2} . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B Sur ce trajet, la réservation d'une cabine et d'un emplacement pour un véhicule sont facturés en supplément du coût de la traversée.

Ces suppléments sont d'un montant de :

- 100 euros pour une cabine ;
- 70 euros pour l'emplacement d'un véhicule.

On suppose qu'une famille peut réserver au maximum une cabine et au maximum un emplacement pour un véhicule.

À ces suppléments peuvent s'ajouter le prix payé pour des extras (repas, boissons, etc.).

On note X la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les suppléments. On donne ci-dessous la loi de probabilité de X .

x_i	0	70	100	170
$P(X = x_i)$	0,19	0,06	0,51	0,24

On note Y la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les extras. On admet que la variable aléatoire Y a pour espérance $E(Y) = 104$ et pour variance $V(Y) = 1686$.

On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.

1. Justifier que $E(X) = 96$ et que $V(X) = 3114$.

2. À titre exceptionnel, la compagnie propose une remise de 40 % sur les suppléments et les extras. On note Z la variable aléatoire qui, à chaque famille effectuant la traversée, associe le montant total pour les suppléments et les extras, en euro, payé par cette famille après réduction.

2.a. Justifier que $Z = 0,6(X + Y)$.

2.b. En déduire que $E(Z) = 120$ et que $V(Z) = 1728$, où $E(Z)$ est l'espérance de la variable aléatoire Z et $V(Z)$ sa variance.

3. On note n un entier naturel non nul et on choisit au hasard un échantillon de n familles effectuant cette traversée bénéficiant de la réduction exceptionnelle définie en question 2. On admet que ce choix peut être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par Z_1 la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la première famille, Z_2 la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la deuxième famille et ainsi de suite, Z_n la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la n -ième famille.

On considère la variable aléatoire $M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}$ donnant le prix total moyen pour les suppléments et les extras, payé par ces familles.

On admet que les variables $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire Z .

3.a. Montrer que l'espérance $E(M_n)$ de la variable M_n est égale à 120, et que sa variance $V(M_n)$ est égale à $\frac{1728}{n}$.

3.b. Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(114 < M_n < 126) \geq 0,85$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

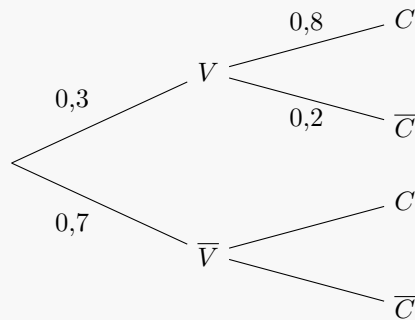
Partie A 1.a. L'énoncé indique que 75 % des familles réservent une cabine. La famille étant choisie au hasard, on a donc

$$P(C) = 0,75.$$

1.b. Les données de l'énoncé se lisent directement sur l'arbre :

- 30 % des familles réservent un emplacement pour un véhicule : $P(V) = 0,3$, d'où, pour l'événement contraire, $P(\bar{V}) = 1 - 0,3 = 0,7$;
- parmi les familles qui réservent un emplacement, 80 % réservent une cabine : c'est une probabilité conditionnelle, $P_V(C) = 0,8$, d'où $P_V(\bar{C}) = 1 - 0,8 = 0,2$ (la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1).

Les quatre pointillés sont donc, de gauche à droite et de haut en bas : 0,3 sur la branche V , 0,7 sur la branche $\bar{V}$, 0,8 sur la branche C issue de V et 0,2 sur la branche $\bar{C}$ issue de V .



Les deux branches issues de $\bar{V}$ ne sont pas demandées ici : la question 4 les déterminera.

2. L'événement « la famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine » est $V \cap C$. La probabilité d'un chemin de l'arbre est le produit des probabilités de ses branches :

$$P(V \cap C) = P(V) \times P_V(C) = 0,3 \times 0,8 = 0,24.$$

La probabilité qu'une famille réserve à la fois un emplacement pour un véhicule et une cabine est 0,24.

3. On sait que la famille a réservé une cabine : on cherche la probabilité conditionnelle $P_C(V)$. Par définition de la probabilité conditionnelle (on a bien $P(C) \neq 0$) :

$$P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{0,24}{0,75} = \frac{24}{75} = \frac{8}{25} = 0,32.$$

Sachant qu'une famille a réservé une cabine, la probabilité qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule est 0,32.

Ce que le correcteur attend : ne pas confondre $P_C(V)$ (demandé ici) avec $P_V(C) = 0,8$ lu sur l'arbre : l'arbre donne les probabilités conditionnelles « sachant V », et non « sachant C ».

4. Les événements V et $\bar{V}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(V \cap C) + P(\bar{V} \cap C).$$

On en déduit

$$P(\bar{V} \cap C) = P(C) - P(V \cap C) = 0,75 - 0,24 = 0,51.$$

Puis, par définition de la probabilité conditionnelle (avec $P(\bar{V}) = 0,7 \neq 0$) :

$$P_{\bar{V}}(C) = \frac{P(\bar{V} \cap C)}{P(\bar{V})} = \frac{0,51}{0,7} = \frac{51}{70} \approx 0,7286,$$

soit $P_{\bar{V}}(C) \approx 0,73$ à 10^{-2} près (et, pour compléter l'arbre, $P_{\bar{V}}(\bar{C}) = 1 - \frac{51}{70} = \frac{19}{70} \approx 0,27$).

Interprétation : parmi les familles qui ne réservent pas d'emplacement pour un véhicule, environ 73 % réservent une cabine. C'est un peu moins que parmi les familles qui voyagent avec un véhicule (80 %).

Ce que le correcteur attend : la formule des probabilités totales écrite explicitement avant le calcul, et une phrase d'interprétation qui parle de « familles sans véhicule » (l'événement conditionnant) et non de « familles avec cabine ».

Partie B 1. L'espérance d'une variable aléatoire discrète est la moyenne de ses valeurs pondérées par leurs probabilités :

$$E(X) = 0 \times 0,19 + 70 \times 0,06 + 100 \times 0,51 + 170 \times 0,24 = 0 + 4,2 + 51 + 40,8 = 96.$$

La variance est l'espérance du carré de l'écart à la moyenne, $V(X) = \sum_i P(X = x_i) (x_i - E(X))^2$:

$$\begin{aligned} V(X) &= 0,19 \times (0 - 96)^2 + 0,06 \times (70 - 96)^2 + 0,51 \times (100 - 96)^2 + 0,24 \times (170 - 96)^2 \\ &= 0,19 \times 9216 + 0,06 \times 676 + 0,51 \times 16 + 0,24 \times 5476 \\ &= 1751,04 + 40,56 + 8,16 + 1314,24 = 3114. \end{aligned}$$

On a bien $E(X) = 96$ et $V(X) = 3114$.

Remarque. On peut contrôler ce résultat avec la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$: $E(X^2) = 4900 \times 0,06 + 10\,000 \times 0,51 + 28\,900 \times 0,24 = 294 + 5100 + 6936 = 12\,330$, et $12\,330 - 96^2 = 12\,330 - 9216 = 3114$. On peut aussi vérifier que la loi de X est cohérente avec la partie A : $P(X = 170) = P(V \cap C) = 0,24$, $P(X = 100) = P(\bar{V} \cap C) = 0,51$, $P(X = 70) = P(V \cap \bar{C}) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$ et $P(X = 0) = P(\bar{V} \cap \bar{C}) = 0,7 - 0,51 = 0,19$.

2.a. Avant réduction, une famille paie $X + Y$ euros pour les suppléments et les extras. Une remise de 40 % signifie qu'elle ne paie que $100 \% - 40 \% = 60 \%$ de ce montant. Le montant payé après réduction est donc

$$Z = (1 - 0,4)(X + Y) = 0,6(X + Y).$$

2.b. Par linéarité de l'espérance (valable sans hypothèse d'indépendance) :

$$E(Z) = E(0,6(X + Y)) = 0,6(E(X) + E(Y)) = 0,6 \times (96 + 104) = 0,6 \times 200 = 120.$$

Pour la variance, on utilise $V(aX) = a^2 V(X)$, puis l'additivité de la variance pour des variables *indépendantes*, ce que sont X et Y par hypothèse :

$$V(Z) = 0,6^2 V(X + Y) = 0,36(V(X) + V(Y)) = 0,36 \times (3114 + 1686) = 0,36 \times 4800 = 1728.$$

On a bien $E(Z) = 120$ et $V(Z) = 1728$.

Ce que le correcteur attend : le facteur 0,6 sort de l'espérance tel quel, mais sort de la variance *au carré* ; et l'égalité $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ doit être justifiée par l'indépendance de X et Y .

3.a. Les variables $Z_1, \dots, Z_n$ suivent la même loi que Z , donc pour tout i , $E(Z_i) = 120$ et $V(Z_i) = 1728$. Par linéarité de l'espérance :

$$E(M_n) = E\left(\frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(E(Z_1) + E(Z_2) + \dots + E(Z_n)) = \frac{1}{n} \times n \times 120 = 120.$$

Les variables $Z_1, \dots, Z_n$ étant indépendantes, la variance de leur somme est la somme de leurs variances ; et le facteur $\frac{1}{n}$ sort au carré :

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} V(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) = \frac{1}{n^2} (V(Z_1) + \dots + V(Z_n)) = \frac{1}{n^2} \times n \times 1728 = \frac{1728}{n}.$$

On retrouve le résultat du cours sur la moyenne d'un échantillon de taille n : même espérance que la loi de départ, variance divisée par n .

3.b. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliquée à la variable M_n d'espérance 120 et de variance $\frac{1728}{n}$, donne pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$P(|M_n - 120| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2}.$$

Or $114 < M_n < 126 \iff -6 < M_n - 120 < 6 \iff |M_n - 120| < 6$. L'événement $\{114 < M_n < 126\}$ est donc le contraire de $\{|M_n - 120| \geq 6\}$. Avec $\varepsilon = 6$:

$$P(|M_n - 120| \geq 6) \leq \frac{V(M_n)}{6^2} = \frac{1728}{36n} = \frac{48}{n},$$

d'où, en passant à l'événement contraire :

$$P(114 < M_n < 126) = 1 - P(|M_n - 120| \geq 6) \geq 1 - \frac{48}{n}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet donc d'affirmer que $P(114 < M_n < 126) \geq 0,85$ dès que

$$1 - \frac{48}{n} \geq 0,85 \iff \frac{48}{n} \leq 0,15 \iff n \geq \frac{48}{0,15} = 320$$

(on a multiplié par $n > 0$ puis divisé par $0,15 > 0$, ce qui conserve le sens de l'inégalité).

Pour $n = 320$, le minorant vaut exactement $1 - \frac{48}{320} = 1 - 0,15 = 0,85$; pour $n \leq 319$, il est strictement inférieur à 0,85. Le plus petit entier cherché est donc

$$n = 320.$$

Interprétation : si l'on choisit au hasard un échantillon d'au moins 320 familles bénéficiant de la réduction, la probabilité que le montant moyen payé par ces familles pour les suppléments et les extras soit strictement compris entre 114 et 126 euros est d'au moins 0,85. Autrement dit, avec une probabilité d'au moins 85 %, la moyenne observée s'écarte de moins de 6 euros de l'espérance 120 euros.

Ce que le correcteur attend : le passage explicite de l'événement $\{114 < M_n < 126\}$ à son contraire $\{|M_n - 120| \geq 6\}$, et la précision que 320 est une taille *suffisante* au sens de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui n'est pas optimale : la probabilité réelle peut dépasser 0,85 pour des échantillons plus petits, mais l'inégalité ne permet pas de l'affirmer.

Exercice 2

Sujet — Exercice 2 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

- la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1,5 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R};$$

- les points $A(3; 0; 2)$ et $B(2; 1; -3)$;
- le plan (P) d'équation : $-x + y - 5z - 0,5 = 0$.

a. Affirmation 1 : Le plan (P) est orthogonal à la droite (AB) , et passe par le milieu du segment $[AB]$.

b. Affirmation 2 : Les droites (d) et (AB) sont sécantes.

c. On considère le point C de coordonnées $(1,5; -3; -1)$.

Affirmation 3 : La mesure de l'angle $\widehat{ACB}$, arrondie à 10^{-1} , est égale à $70,5^\circ$.

2. Titouan et Clotilde participent à un escape game. Ils se retrouvent dans une salle possédant deux portes de sortie, A et B, chacune protégée par un digicode équipé de 8 touches portant des symboles différents :

- le digicode de la porte A utilise un code de 3 symboles différents devant être saisis dans l'ordre;
- celui de la porte B utilise un code de 4 symboles différents qui peuvent être saisis dans n'importe quel ordre.

N'étant pas parvenus à obtenir d'indices, ils décident de procéder au hasard à la saisie des codes. Clotilde choisit un code pour la porte A, et Titouan choisit un code pour la porte B. On considère que les choix des codes sont équiprobables.

Affirmation 4 : Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

Corrigé

1.a. Affirmation 1 : VRAIE.

Calculons les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ 1 - 0 \\ -3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Le plan (P) a pour équation cartésienne $-x + y - 5z - 0,5 = 0$: d'après le cours, un vecteur

normal à (P) est le vecteur formé par les coefficients de x , y et z , soit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

On constate que $\vec{n} = \vec{AB}$. Le vecteur $\vec{AB}$, qui dirige la droite (AB) , est donc un vecteur normal au plan (P) : la droite (AB) est orthogonale au plan (P) .

Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$I\left(\frac{3+2}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{2+(-3)}{2}\right) = I\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Vérifions que I appartient à (P) en reportant ses coordonnées dans l'équation :

$$-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 0,5 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

L'équation est vérifiée : $I \in (P)$. Le plan (P) est orthogonal à (AB) et passe par le milieu de $[AB]$: c'est le plan médiateur du segment $[AB]$. L'affirmation 1 est **vraie**.

Ce que le correcteur attend : les deux conditions doivent être vérifiées, l'une sans l'autre ne suffit pas ; et l'appartenance de I à (P) se prouve par le calcul $-x_I + y_I - 5z_I - 0,5 = 0$, pas par une simple affirmation.

1.b. Affirmation 2 : FAUSSE.

Un vecteur directeur de (d) se lit sur sa représentation paramétrique (coefficients de t) :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ Un vecteur directeur de } (AB) \text{ est } \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Les droites ne sont pas parallèles. Si $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ étaient colinéaires, il existerait un réel k tel que $\vec{AB} = k\vec{u}$, soit $-1 = k$, $1 = -k$ et $-5 = -2k$. Les deux premières égalités imposent $k = -1$, mais alors $-2k = 2 \neq -5$: il n'y a pas de tel k . Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc (d) et (AB) ne sont pas parallèles.

Les droites n'ont aucun point commun. La droite (AB) passe par $A(3;0;2)$ et est dirigée par $\vec{AB}$; une représentation paramétrique de (AB) est donc

$$\begin{cases} x = 3 - s \\ y = s \\ z = 2 - 5s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

On utilise un paramètre s distinct du paramètre t de (d) , car un éventuel point d'intersection n'a aucune raison de correspondre à la même valeur du paramètre sur les deux droites. Un point commun aux deux droites correspond à un couple $(t; s)$ solution du système

$$\begin{cases} t = 3 - s \\ -1,5 - t = s \\ 2 - 2t = 2 - 5s. \end{cases}$$

En reportant $t = 3 - s$ (première équation) dans la deuxième : $-1,5 - (3 - s) = s$, soit $-4,5 + s = s$, soit $-4,5 = 0$, ce qui est impossible. Le système n'a pas de solution : les droites (d) et (AB) n'ont aucun point commun.

Deux droites ni parallèles ni sécantes sont *non coplanaires*. Les droites (d) et (AB) ne sont donc pas sécantes : l'affirmation 2 est **fausse**.

Autre argument. Pour tout point de (d) , $x + y = t + (-1,5 - t) = -1,5$; pour tout point de (AB) , $x + y = (3 - s) + s = 3$. Un point commun devrait vérifier à la fois $x + y = -1,5$ et $x + y = 3$: impossible.

Ce que le correcteur attend : montrer que les droites ne sont pas parallèles ne suffit pas ; dans l'espace, deux droites non parallèles peuvent ne pas se couper. Il faut résoudre le système avec deux paramètres différents.

1.c. Affirmation 3 : VRAIE.

L'angle $\widehat{ACB}$ a pour sommet C : on calcule les vecteurs $\vec{CA}$ et $\vec{CB}$:

$$\vec{CA} = \begin{pmatrix} 3 - 1,5 \\ 0 - (-3) \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{CB} = \begin{pmatrix} 2 - 1,5 \\ 1 - (-3) \\ -3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le repère étant orthonormé, on utilise l'expression analytique du produit scalaire et de la norme :

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 1,5 \times 0,5 + 3 \times 4 + 3 \times (-2) = 0,75 + 12 - 6 = 6,75,$$

$$\|\vec{CA}\| = \sqrt{1,5^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{2,25 + 9 + 9} = \sqrt{20,25} = 4,5,$$

$$\|\vec{CB}\| = \sqrt{0,5^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{0,25 + 16 + 4} = \sqrt{20,25} = 4,5.$$

Par définition du produit scalaire, $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \|\vec{CA}\| \times \|\vec{CB}\| \times \cos(\widehat{ACB})$, d'où

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\|\vec{CA}\| \times \|\vec{CB}\|} = \frac{6,75}{4,5 \times 4,5} = \frac{6,75}{20,25} = \frac{1}{3}.$$

À la calculatrice (en degrés), $\widehat{ACB} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,53^\circ$, soit $70,5^\circ$ à 10^{-1} près. L'affirmation 3 est **vraie**.

Remarque. Le triangle ABC est isocèle en C puisque $CA = CB = 4,5$: cela ne sert pas ici, mais confirme la cohérence des calculs.

2. Affirmation 4 : VRAIE.

Porte A (Clotilde). Un code est une suite de 3 symboles *différents*, saisis *dans l'ordre*, choisis parmi 8 : l'ordre compte et il n'y a pas de répétition, c'est un arrangement de 3 éléments parmi 8. Par le principe multiplicatif (8 choix pour le premier symbole, 7 pour le deuxième, 6 pour le troisième) :

$$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336 \text{ codes possibles.}$$

Les choix étant équiprobables et un seul code ouvrant la porte, la probabilité que Clotilde ouvre sa porte est

$$p_A = \frac{1}{336} \approx 0,0030.$$

Porte B (Titouan). Un code est un ensemble de 4 symboles *différents* qui peuvent être saisis *dans n'importe quel ordre* : l'ordre ne compte pas, c'est une combinaison de 4 éléments parmi 8. Le nombre de codes possibles est

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1680}{24} = 70.$$

Les choix étant équiprobables, la probabilité que Titouan ouvre sa porte est

$$p_B = \frac{1}{70} \approx 0,0143.$$

Comparaison. Comme $70 < 336$, on a $\frac{1}{70} > \frac{1}{336}$, c'est-à-dire $p_B > p_A$: Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde (près de cinq fois plus, puisque $\frac{336}{70} = 4,8$). L'affirmation 4 est **vraie**.

Remarque. Si l'on préfère compter les saisies ordonnées de Titouan, il y a $A_8^4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ suites de 4 symboles différents, dont $4! = 24$ (toutes les façons d'ordonner les 4 bons symboles) ouvrent la porte : $\frac{24}{1680} = \frac{1}{70}$, la même valeur.

Ce que le correcteur attend : la question « l'ordre compte-t-il ? » posée avant de choisir la formule : arrangement A_n^p quand l'ordre compte sans répétition, combinaison $\binom{n}{p}$ quand il ne compte pas. Le piège classique est d'utiliser 8^3 ou 8^4 , qui autoriseraient des répétitions exclues par l'énoncé (« symboles différents »).

Exercice 3

Sujet — Exercice 3 — 6 points

On étudie le fonctionnement d'un système de chauffage installé dans une pièce. Ce système se déclenche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à 18°C (degrés Celsius), et s'éteint lorsqu'elle atteint 20°C .

Partie A : Phase de chauffage Pour une température de la pièce variant de 18°C à 20°C , le système de chauffage fonctionne en continu. La température de la pièce augmente progressivement.

Dans cette partie, on modélise la température de la pièce, en degré Celsius, à l'instant t , exprimé en dizaines de minutes, par une fonction T définie sur $[0; +\infty[$.

On admet que la fonction T est :

- dérivable sur $[0; +\infty[$;
- solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0,035y + 0,91$ où y est une fonction de la variable t , définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

On note T' la fonction dérivée de la fonction T .

On suppose qu'au début de l'étude, la température de la pièce est de 18°C . Ainsi $T(0) = 18$.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0; +\infty[$.
2. En déduire que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$T(t) = 26 - 8e^{-0,035t}.$$

3. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps la pièce atteindra la température de 20°C . On exprimera le résultat en heures et minutes arrondi à la minute.
4. Si une panne du système de chauffage l'empêche de s'éteindre lorsque la température de la pièce atteint 20°C , la température de la pièce pourra-t-elle dépasser 28°C selon ce modèle ? Justifier.

Partie B : Phase de refroidissement Lorsque la pièce atteint la température de 20°C , le système de chauffage s'éteint et la pièce refroidit.

On modélise la température de la pièce par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}$$

où n est un nombre entier exprimant le temps écoulé en dizaines de minutes.

1. Montrer que $u_1 = 19,72$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 10$.
On admet que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

- 4.a. Justifier que cette limite est solution de l'équation $x = 0,965x + 0,35$.
 4.b. Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
 5. On rappelle que le système de chauffage se met en marche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à 18°C .
 5.a. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie le nombre de dizaines de minutes à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

```

1  def marche() :
2      n = 0
3      u = 20
4      while ... :
5          u = ...
6          n = ...
7      return n

```

- 5.b. Déterminer le temps, en dizaines de minutes, à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

Corrigé

Partie A : Phase de chauffage 1. L'équation $(E) : y' = -0,035y + 0,91$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,035 \neq 0$ et $b = 0,91$. D'après le théorème du cours sur les solutions de $y' = ay + b$ (cas $a \neq 0$), ses solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto C e^{at} - \frac{b}{a}$, où C est un réel quelconque. Ici

$$-\frac{b}{a} = \frac{0,91}{0,035} = \frac{910}{35} = 26,$$

et 26 est la solution constante de (E) (on vérifie que $-0,035 \times 26 + 0,91 = -0,91 + 0,91 = 0$). Les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont donc les fonctions

$$y(t) = C e^{-0,035t} + 26, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. La fonction T est solution de (E) : il existe donc un réel C tel que, pour tout $t \geq 0$, $T(t) = C e^{-0,035t} + 26$. La condition initiale $T(0) = 18$ détermine C :

$$T(0) = C e^0 + 26 = C + 26 = 18 \iff C = 18 - 26 = -8.$$

Ainsi, pour tout réel t de $[0; +\infty[$:

$$T(t) = 26 - 8 e^{-0,035t}.$$

3. On cherche l'instant $t \geq 0$ tel que $T(t) = 20$:

$$26 - 8 e^{-0,035t} = 20 \iff 8 e^{-0,035t} = 6 \iff e^{-0,035t} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $\ln(e^x) = x$:

$$e^{-0,035t} = \frac{3}{4} \iff -0,035t = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \iff t = -\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{0,035} = \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{0,035} \approx 8,2195.$$

Cette solution est unique : $T'(t) = 0,28 e^{-0,035t} > 0$, donc T est strictement croissante et ne prend qu'une fois la valeur 20. Le temps t est exprimé en dizaines de minutes : $8,2195 \times 10 \approx 82,2$

minutes, soit, arrondi à la minute, 82 minutes. Comme $82 = 60 + 22$, la pièce atteint 20°C au bout d'environ **1 h 22 min**.

Ce que le correcteur attend : la conversion des dizaines de minutes en minutes avant l'arrondi (arrondir 8,2 à 8 dizaines donnerait 1 h 20 min, ce qui est faux), et une valeur exacte $t = \frac{\ln(4/3)}{0,035}$ écrite avant l'approximation.

4. Pour tout réel $t \geq 0$, $e^{-0,035t} > 0$ (une exponentielle est strictement positive), donc $8e^{-0,035t} > 0$ et

$$T(t) = 26 - 8e^{-0,035t} < 26.$$

Selon ce modèle, la température de la pièce reste strictement inférieure à 26°C à tout instant : elle ne pourra donc jamais dépasser 28°C , même si le système ne s'éteint pas. Plus précisément, T est strictement croissante et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,035t} = 0$ donne $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 26$: la température se rapproche de 26°C , l'état d'équilibre du modèle (la solution constante de (E)), sans jamais l'atteindre.

Partie B : Phase de refroidissement 1. D'après la relation de récurrence avec $n = 0$ et $u_0 = 20$:

$$u_1 = 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07e^{-0,1 \times 0} = 19,3 + 0,35 + 0,07 \times 1 = 19,72,$$

car $e^0 = 1$. On a bien $u_1 = 19,72$.

2. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$: « $u_n > 10$ » est vraie.

Initialisation. $u_0 = 20 > 10$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que, pour un certain entier naturel k , $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k > 10$. Montrons que $u_{k+1} > 10$.

- En multipliant l'hypothèse de récurrence par $0,965 > 0$: $0,965 u_k > 0,965 \times 10 = 9,65$.
- Par ailleurs, $e^{-0,1k} > 0$ (exponentielle), donc $0,07e^{-0,1k} > 0$.

En additionnant membre à membre :

$$u_{k+1} = 0,965 u_k + 0,35 + 0,07e^{-0,1k} > 9,65 + 0,35 + 0 = 10.$$

Ainsi $P(k+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n > 10$.

3. La suite (u_n) est décroissante (admis) et minorée par 10 (question 2). D'après le théorème de convergence monotone, toute suite décroissante et minorée est convergente : la suite (u_n) converge donc vers un réel ℓ , et $\ell \geq 10$.

Ce que le correcteur attend : le théorème nommé et ses deux hypothèses citées (décroissante et minorée) ; la minoration par 10 vient de la question précédente, c'est le « en déduire » de l'énoncé.

4.a. La suite (u_n) converge vers ℓ , donc la suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ (c'est la même suite décalée d'un rang). D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,1n) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-0,1n} = 0$. Par opérations sur les limites (produit par une constante, somme) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,965 u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}) = 0,965 \ell + 0,35 + 0 = 0,965 \ell + 0,35.$$

Or cette expression est u_{n+1} , dont la limite est ℓ . Par unicité de la limite,

$$\ell = 0,965 \ell + 0,35.$$

La limite ℓ est donc solution de l'équation $x = 0,965 x + 0,35$.

4.b. Résolvons cette équation :

$$x = 0,965x + 0,35 \iff x - 0,965x = 0,35 \iff 0,035x = 0,35 \iff x = \frac{0,35}{0,035} = 10.$$

L'équation a pour unique solution 10, donc $\ell = 10$.

Interprétation : si le système de chauffage ne se remettait jamais en marche, la température de la pièce diminuerait en se rapprochant de 10°C sans jamais descendre en dessous (on a montré $u_n > 10$ pour tout n) : 10°C est la température d'équilibre de la pièce non chauffée. En réalité, le chauffage se rallume dès 18°C , et cette limite n'est jamais approchée.

5.a. La fonction doit parcourir les termes de la suite tant que la température est strictement supérieure à 18°C , et s'arrêter au premier indice n pour lequel $u_n \leq 18$, condition de remise en marche du chauffage. À l'entrée dans la boucle, la variable u contient u_n et la variable n contient n ; on calcule u_{n+1} à partir de u_n et de n , puis on incrémente n :

```

1  def marche() :
2      n = 0
3      u = 20
4      while u > 18 :
5          u = 0.965 * u + 0.35 + 0.07 * exp(-0.1 * n)
6          n = n + 1
7      return n

```

La ligne 4 traduit « tant que le chauffage n'a pas à se rallumer » ($u > 18$, le contraire de $u_n \leq 18$); la ligne 5 est la relation de récurrence, dans laquelle l'exposant utilise la valeur courante de n , celle de u_n ; la ligne 6 passe au rang suivant. L'ordre des lignes 5 et 6 est essentiel : si l'on incrémente n avant de calculer u , l'exposant serait $-0,1(n+1)$ au lieu de $-0,1n$. À la sortie de la boucle, u contient le premier terme $u_n \leq 18$ et n son indice, que la fonction renvoie. (La fonction `exp` suppose l'instruction `from math import exp` en tête du programme.)

5.b. On calcule les termes successifs de la suite avec la relation de récurrence (valeurs arrondies à 10^{-3}) :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	19,72	19,443	19,170	18,901	18,636	18,376	18,122	17,872

Par exemple $u_2 = 0,965 \times 19,72 + 0,35 + 0,07 e^{-0,1} \approx 19,0298 + 0,35 + 0,0633 \approx 19,443$. On lit $u_7 \approx 18,12 > 18$ et $u_8 \approx 17,87 \leq 18$: le premier indice n pour lequel $u_n \leq 18$ est $n = 8$, et c'est la valeur que renvoie `marche()`. La suite étant décroissante, on a d'ailleurs $u_n \leq 18$ pour tout $n \geq 8$.

Le système de chauffage se remettra donc en marche au bout de 8 dizaines de minutes, c'est-à-dire 80 minutes (1 h 20 min) après son extinction.

Ce que le correcteur attend : l'encadrement $u_7 > 18 \geq u_8$ écrit explicitement (le programme s'arrête au premier franchissement du seuil), avec les valeurs numériques qui le justifient.

Exercice 4

Sujet — Exercice 4 — 5 points

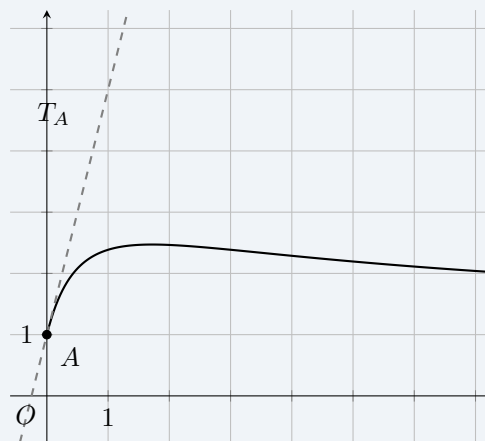
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = a + \frac{b \ln(x+1)}{x+1},$$

où a et b sont des réels, et $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $] - 1 ; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A L'objectif de cette partie est de déterminer les valeurs de a et b de sorte que la courbe représentative de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ corresponde à celle tracée dans le repère orthonormé ci-dessous :



On précise que la droite T_A est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $A(0 ; 1)$.

1. Justifier que $a = 1$.
2. En utilisant le graphique :
 - 2.a. Donner la valeur de $f'(0)$. Justifier.
 - 2.b. Donner le signe de $f''(1)$. Justifier.
- 3.a. Montrer que pour tout réel x appartenant à $] - 1 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{b(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}.$$

- 3.b. En déduire la valeur de b .

Partie B On admet dans la suite de l'exercice que la fonction f est définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{4 \ln(x+1)}{x+1}.$$

1. Justifier que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f .

2. Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x+1) > 0$ sur $] -1 ; +\infty[$.

3. On admet que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en indiquant la valeur exacte de son extremum. Justifier.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2 ; +\infty[$. En donner une valeur arrondie à 10^{-1} .

5.a. Montrer que :

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \frac{1}{2}(\ln 3)^2.$$

5.b. En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Corrigé

Partie A 1. Le point $A(0; 1)$ appartient à la courbe représentative de f , donc $f(0) = 1$. Or

$$f(0) = a + \frac{b \ln(0+1)}{0+1} = a + \frac{b \ln(1)}{1} = a + 0 = a,$$

puisque $\ln(1) = 0$. Ainsi $a = f(0) = 1$.

2.a. Le nombre dérivé $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A à la courbe au point d'abscisse 0. Sur le graphique, la droite T_A passe par $A(0; 1)$ et par le point de coordonnées $(1; 5)$ (un carreau vers la droite, quatre carreaux vers le haut). Son coefficient directeur vaut donc

$$f'(0) = \frac{5-1}{1-0} = 4.$$

2.b. Sur le graphique, au voisinage du point d'abscisse 1, la courbe est « tournée vers le bas » : elle est située *au-dessous* de ses tangentes (on le voit déjà en A , où la courbe reste sous T_A), et la pente de ses tangentes diminue quand x augmente, de 4 en A jusqu'à 0 au sommet de la courbe (vers $x \approx 1,7$). La fonction f est donc concave sur un intervalle contenant 1, autrement dit f' y est décroissante. D'après la caractérisation de la convexité du cours, pour une fonction deux fois dérivable, la concavité sur un intervalle équivaut à $f'' \leq 0$ sur cet intervalle ; la courbe n'étant pas rectiligne autour de 1 (pas de point d'inflexion en 1), on lit $f''(1) < 0$: $f''(1)$ est **négatif**.

Vérification (hors programme de la question, qui demande une lecture graphique). Avec $b = 4$, on trouvera $f'(x) = \frac{4(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$, d'où en dérivant à nouveau

$$f''(x) = 4 \times \frac{-\frac{1}{x+1}(x+1)^2 - (1 - \ln(x+1)) \times 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{4(2 \ln(x+1) - 3)}{(x+1)^3},$$

et $f''(1) = \frac{4(2 \ln 2 - 3)}{8} = \frac{2 \ln 2 - 3}{2} \approx -0,81 < 0$, ce qui confirme la lecture.

3.a. Sur $] -1 ; +\infty[$, on a $x+1 > 0$, donc $\ln(x+1)$ est bien défini et dérivable. Écrivons

$f = a + b \frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln(x+1)$ et $v(x) = x+1$. Alors

$$u'(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad v'(x) = 1.$$

D'après la formule de dérivation d'un quotient, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)' = \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - \ln(x+1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}.$$

La constante a a une dérivée nulle, et le facteur b est conservé. Donc, pour tout réel x de $] -1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{b(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}.$$

3.b. En appliquant cette formule en $x = 0$:

$$f'(0) = \frac{b(1 - \ln(1))}{1^2} = \frac{b(1 - 0)}{1} = b.$$

D'après la question 2.a, $f'(0) = 4$. Donc $b = 4$.

Ce que le correcteur attend : la question 3.b est un « en déduire » : il faut relier la formule de 3.a à la lecture graphique de 2.a, et non chercher b par une autre voie.

Partie B 1. Étudions la limite de f en $+\infty$. Posons $X = x+1$: lorsque $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$, et

$$\frac{\ln(x+1)}{x+1} = \frac{\ln X}{X}.$$

Par croissances comparées, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln(x+1)}{x+1} = 0$ et, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + 0 = 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1) = 0$, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

2. Sur $] -1; +\infty[$, on a $x+1 > 0$: l'inéquation a un sens. Comme $1 = \ln(e)$ et que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$:

$$1 - \ln(x+1) > 0 \iff \ln(x+1) < 1 \iff \ln(x+1) < \ln(e) \iff x+1 < e \iff x < e - 1.$$

En tenant compte du domaine $] -1; +\infty[$, l'ensemble des solutions est

$$S =] -1; e - 1[.$$

(On note que $e - 1 \approx 1,72 > -1$, donc l'intervalle n'est pas vide.)

3. D'après la partie A avec $b = 4$, pour tout $x > -1$:

$$f'(x) = \frac{4(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}.$$

Le dénominateur $(x+1)^2$ est strictement positif sur $] -1; +\infty[$, et $4 > 0$: le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \ln(x+1)$. D'après la question 2 :

— $f'(x) > 0$ pour $x \in] -1; e - 1[$;

- $f'(e-1) = 0$ (car $\ln(e) = 1$);
- $f'(x) < 0$ pour $x \in]e-1; +\infty[$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $] -1; e-1]$ et strictement décroissante sur $[e-1; +\infty[$: elle admet un maximum en $x = e-1$, de valeur exacte

$$f(e-1) = 1 + \frac{4\ln(e-1+1)}{e-1+1} = 1 + \frac{4\ln(e)}{e} = 1 + \frac{4}{e} \approx 2,47.$$

Avec les limites $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ (admise) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (question 1), on obtient le tableau de variation complet :

x	-1		$e-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1 + \frac{4}{e}$	$\searrow$	1

Les valeurs $-\infty$ (en -1) et 1 (en $+\infty$) sont des limites, non atteintes : la borne -1 est exclue du domaine, et $f(x) > 1$ pour tout $x > 0$.

Ce que le correcteur attend : le signe de f' justifié à partir de la question 2 (le facteur $(x+1)^2$ ne change rien au signe), et la valeur exacte $1 + \frac{4}{e}$, pas seulement son approximation.

4. Sur l'intervalle $[2; +\infty[$:

- f est continue (elle est dérivable sur $] -1; +\infty[$);
- f est strictement décroissante, car $2 > e-1 \approx 1,72$ et f est strictement décroissante sur $[e-1; +\infty[$ (question 3);
- $f(2) = 1 + \frac{4\ln 3}{3} \approx 2,46$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, or $1 < 1,5 < 2,46$: le réel $1,5$ est compris entre la valeur de f en 2 et sa limite en $+\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), étendu à l'intervalle non borné $[2; +\infty[$, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution α dans $[2; +\infty[$.

Valeur approchée. À la calculatrice, $f(25) \approx 1,5012 > 1,5$ et $f(25,1) \approx 1,4999 < 1,5$: comme f est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$, on a $25 < \alpha < 25,1$. En affinant, $f(25,05) \approx 1,5006 > 1,5$ et $f(25,15) \approx 1,4993 < 1,5$, donc $25,05 < \alpha < 25,15$ et

$$\alpha \approx 25,1 \quad (\text{à } 10^{-1} \text{ près}).$$

(Une valeur plus précise est $\alpha \approx 25,09$.)

Ce que le correcteur attend : les trois hypothèses (continuité, stricte monotonie, encadrement de $1,5$ par $f(2)$ et la limite) et le nom du théorème; l'unicité vient de la stricte décroissance, l'existence du théorème des valeurs intermédiaires. Attention à ne pas conclure sur $] -1; +\infty[$ tout entier : l'équation y a une seconde solution, entre -1 et $e-1$.

5.a. Posons $u(x) = \ln(x+1)$ sur $[0; 2]$: u est dérivable et $u'(x) = \frac{1}{x+1}$. La fonction à intégrer s'écrit

$$\frac{\ln(x+1)}{x+1} = \frac{1}{x+1} \times \ln(x+1) = u'(x)u(x),$$

qui est de la forme $u'u$, dont une primitive est $\frac{u^2}{2}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ sur $[0; 2]$ est donc $F(x) = \frac{1}{2}(\ln(x+1))^2$ (on vérifie : $F'(x) = \frac{1}{2} \times 2\ln(x+1) \times \frac{1}{x+1} = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$). Par

conséquent

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x+1))^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} (\ln 3)^2 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2 = \frac{1}{2} (\ln 3)^2 - 0 = \frac{1}{2} (\ln 3)^2.$$

5.b. Sur $[0; 2]$, on a $x + 1 \geq 1$, donc $\ln(x + 1) \geq 0$ et $f(x) = 1 + \frac{4 \ln(x + 1)}{x + 1} \geq 1 > 0$. La fonction f est continue et positive sur $[0; 2]$: l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe, l'axe des ordonnées ($x = 0$) et la droite d'équation $x = 2$ est, en unités d'aire, $\mathcal{A} = \int_0^2 f(x) dx$. Par linéarité de l'intégrale et d'après la question 5.a :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \left(1 + \frac{4 \ln(x + 1)}{x + 1} \right) dx = \int_0^2 1 dx + 4 \int_0^2 \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} dx = 2 + 4 \times \frac{1}{2} (\ln 3)^2 = 2 + 2(\ln 3)^2.$$

L'aire cherchée vaut exactement $2 + 2(\ln 3)^2$ unités d'aire, soit environ 4,41 unités d'aire.

Ce que le correcteur attend : la positivité de f sur $[0; 2]$ justifiée avant d'identifier l'aire à l'intégrale, et la valeur exacte donnée avant l'approximation.