

Mathématiques

Baccalauréat général 2026 — épreuve de spécialité

Métropole, mercredi 17 juin 2026 (26-MATJ2ME1)

Corrigé

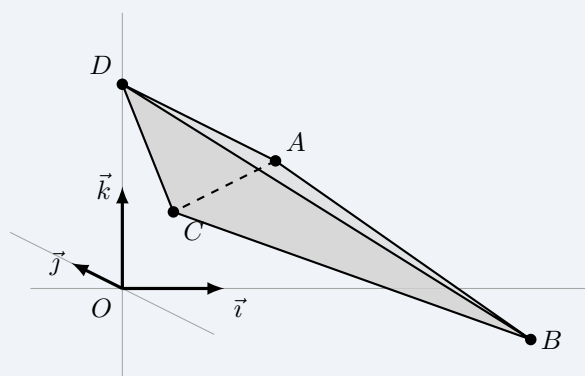
Quatre exercices

Exercice 1

Sujet — Exercice 1 — 5 points

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(2; 1; 1), \quad B(3; -2; 0), \quad C(0; -1; 1) \quad \text{et} \quad D(0; 0; 2).$$



1. Montrer que les points A , B et C définissent un plan.

2.a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .

2.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x - y + 4z - 5 = 0.$$

3. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC) est donnée par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

4. Montrer que le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point $H \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3} \right)$.

5.a. Montrer que le triangle ABC est isocèle en B .

5.b. Montrer que l'aire du triangle ABC est $3\sqrt{2}$.

6.a. En déduire que le volume du tétraèdre $ABCD$ est égal à 1.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

6.b. On admet que la distance du point A au plan (BCD) est égale à $\sqrt{2}$. En déduire l'aire du triangle BCD .

- 7.** Dans cette question, on note D_k le point ayant pour coordonnées $(0; 0; k)$ où k est un réel.
- 7.a.** Déterminer la valeur de k pour laquelle les points A , B , C et D_k sont coplanaires. Quel est alors le projeté orthogonal du point D_k sur le plan (ABC) ?
- 7.b.** Peut-on trouver une valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur le plan (ABC) ?

Corrigé

1. Trois points définissent un plan si et seulement s'ils ne sont pas alignés, c'est-à-dire si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires. Calculons leurs coordonnées :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 0-2 \\ -1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

S'il existait un réel λ tel que $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$, la troisième coordonnée donnerait $0 = -\lambda$, soit $\lambda = 0$, et la première donnerait alors $-2 = 0$, ce qui est absurde. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont donc pas colinéaires : les points A , B et C ne sont pas alignés et définissent un plan (ABC) .

2.a. Un vecteur non nul est normal au plan (ABC) s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan. Le repère étant orthonormé, on calcule les produits scalaires avec l'expression analytique :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times 1 + (-1) \times (-3) + 4 \times (-1) = 1 + 3 - 4 = 0,$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) + 4 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ du plan (ABC) : c'est un vecteur normal au plan (ABC) .

2.b. D'après le théorème sur l'équation cartésienne d'un plan, comme $\vec{n}(1; -1; 4)$ est normal à (ABC) , ce plan admet une équation de la forme $x - y + 4z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$. Le point $A(2; 1; 1)$ appartient au plan, donc :

$$2 - 1 + 4 \times 1 + d = 0 \iff 5 + d = 0 \iff d = -5.$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $x - y + 4z - 5 = 0$.

Vérification : pour $B(3; -2; 0)$, $3 - (-2) + 0 - 5 = 0$; pour $C(0; -1; 1)$, $0 - (-1) + 4 - 5 = 0$. Les trois points vérifient bien l'équation.

3. La droite Δ est orthogonale au plan (ABC) : elle admet pour vecteur directeur tout vecteur normal à ce plan, en particulier $\vec{n}(1; -1; 4)$. Elle passe par $D(0; 0; 2)$. Un point $M(x; y; z)$ appartient à Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\vec{DM} = t\vec{n}$, soit :

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \times t \\ y = 0 + (-1) \times t \\ z = 2 + 4 \times t \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

C'est bien la représentation paramétrique annoncée.

4. Par définition, le projeté orthogonal H de D sur le plan (ABC) est le point d'intersection de ce plan avec la droite Δ passant par D et orthogonale à (ABC) . On cherche donc le réel t pour lequel le point de Δ de paramètre t vérifie l'équation du plan :

$$t - (-t) + 4(2 + 4t) - 5 = 0 \iff 2t + 8 + 16t - 5 = 0 \iff 18t + 3 = 0 \iff t = -\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}.$$

En reportant dans la représentation paramétrique :

$$x_H = -\frac{1}{6}, \quad y_H = -\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}, \quad z_H = 2 + 4 \times \left(-\frac{1}{6}\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est donc bien $H\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$.

Vérification : $-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 4 \times \frac{4}{3} - 5 = -\frac{1}{3} + \frac{16}{3} - \frac{15}{3} = 0$: H est bien dans le plan.

5.a. Le triangle ABC est isocèle en B si $BA = BC$. Dans le repère orthonormé :

$$\vec{BA} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11};$$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ -1 - (-2) \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad BC = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}.$$

Ainsi $BA = BC = \sqrt{11}$: le triangle ABC est isocèle en B .

5.b. Dans un triangle isocèle en B , la médiane issue de B est aussi la hauteur issue de B : elle passe par le milieu M de la base $[AC]$. On a

$$M\left(\frac{2+0}{2}; \frac{1+(-1)}{2}; \frac{1+1}{2}\right) = M(1; 0; 1) \quad \text{et} \quad \vec{BM} \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 0 - (-2) \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifions directement que (BM) est la hauteur : $\vec{BM} \cdot \vec{AC} = (-2) \times (-2) + 2 \times (-2) + 1 \times 0 = 4 - 4 + 0 = 0$, donc $(BM) \perp (AC)$. Les longueurs valent

$$BM = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

L'aire du triangle ABC est donc

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AC \times BM}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 3}{2} = 3\sqrt{2}.$$

6.a. Prenons le triangle ABC comme base du tétraèdre $ABCD$. La hauteur relative à cette base est la distance de D au plan (ABC) , c'est-à-dire la longueur DH où H est le projeté orthogonal de D sur (ABC) (question 4) :

$$D^H \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad DH = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{1+1+16}{36}} = \sqrt{\frac{18}{36}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'après la formule rappelée :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3 \times 2}{3 \times 2} = 1.$$

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est égal à 1 (unité de volume).

Autre méthode : $DH = |t| \times \|\vec{n}\|$ avec $t = -\frac{1}{6}$, soit $DH = \frac{1}{6} \sqrt{1+1+16} = \frac{\sqrt{18}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.b. Le volume ne dépend pas de la face choisie comme base. Prenons cette fois le triangle BCD comme base : la hauteur relative est la distance de A au plan (BCD) , égale à $\sqrt{2}$ d'après l'énoncé. Alors

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{BCD} \times \sqrt{2} = 1 \iff \mathcal{A}_{BCD} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

L'aire du triangle BCD est $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (unité d'aire), soit environ 2,12.

Ce que le correcteur attend : le mot-clé est « en déduire » : on réutilise le volume trouvé en **6.a** avec une autre base, sans recalculer l'aire de BCD par ses côtés.

7.a. Les points A, B, C et D_k sont coplanaires si et seulement si $D_k(0; 0; k)$ appartient au plan (ABC) , c'est-à-dire si ses coordonnées vérifient l'équation $x - y + 4z - 5 = 0$:

$$0 - 0 + 4k - 5 = 0 \iff k = \frac{5}{4}.$$

Pour $k = \frac{5}{4}$, le point $D_k\left(0; 0; \frac{5}{4}\right)$ est dans le plan (ABC) : son projeté orthogonal sur ce plan est le point D_k lui-même (le projeté orthogonal d'un point du plan est ce point).

7.b. Le point A appartient au plan (ABC) . Il est le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) si et seulement si la droite (D_kA) est orthogonale au plan (ABC) , c'est-à-dire si et seulement si le vecteur $\vec{D_kA}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$ (ou nul, ce qui n'arrive jamais ici puisque $x_A = 2 \neq 0$). Or

$$\vec{D_kA} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 - k \end{pmatrix}.$$

S'il existait un réel λ tel que $\vec{D_kA} = \lambda \vec{n}$, les deux premières coordonnées donneraient $2 = \lambda$ et $1 = -\lambda$, ce qui est impossible. Quelle que soit la valeur de k , $\vec{D_kA}$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}$: la droite (D_kA) n'est jamais orthogonale au plan (ABC) .

On peut aussi le voir directement : $\vec{D_kA} \cdot \vec{AC} = 2 \times (-2) + 1 \times (-2) + (1 - k) \times 0 = -6 \neq 0$ pour tout réel k , donc (D_kA) n'est jamais orthogonale à la droite (AC) du plan.

Conclusion : il n'existe aucune valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur le plan (ABC) .

Ce que le correcteur attend : la condition « A est le projeté orthogonal de D_k » se traduit par deux exigences, $A \in (ABC)$ (vraie) et $(D_kA) \perp (ABC)$; c'est la seconde qui échoue, et il faut le montrer pour *tout* k , pas pour une valeur particulière.

Exercice 2

Sujet — Exercice 2 — 5 points

Un bassin destiné à l'élevage des truites contient 30 000 litres d'eau, régulièrement renouvelée. Pour vérifier la présence éventuelle de substances polluantes dans le bassin, on procède à des analyses régulières.

On étudie dans les deux parties ci-dessous un cas de contamination de l'eau par une substance polluante à l'aide de deux modèles différents. Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : modèle discret On note V_n le volume, en litre, de la substance polluante présente dans le bassin, n heures après le début du phénomène de pollution. On a ainsi $V_0 = 0$. On admet que pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 0,995 V_n + 6$.

1. Calculer V_1 et V_2 .
2. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il renvoie le volume en litre de substance polluante présente dans le bassin après n heures.

```
def volume(n):  
    v = ...  
    for k in range(n):  
        v = ...  
    return v
```

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.
4. Justifier que la suite (V_n) converge, et calculer sa limite.

Partie B : modèle continu On note $v(t)$ le volume, en litre, de la substance polluante présente dans le bassin à l'instant t , en heure.

On admet que la fonction v est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$, et on note v' sa fonction dérivée.

On considère que le phénomène de pollution débute au temps $t = 0$; ainsi $v(0) = 0$. On admet que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' = -0,005y + 6,$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y .

- 1.a. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0; +\infty[$.
- 1.b. Montrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$v(t) = 1200 \left(1 - e^{-0,005t}\right).$$

- 1.c. Calculer la limite de v en $+\infty$.
- 1.d. Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Un taux de substance polluante supérieur à 5 % du volume du bassin nécessite un nettoyage complet. Selon ce modèle, le propriétaire devra-t-il procéder à ce nettoyage ?
3. Pour pouvoir dépolluer rapidement le bassin et éviter de lourdes conséquences sur l'élevage, il est préconisé que le volume de la substance polluante ne dépasse pas 50 litres. Déterminer la valeur exacte de l'instant au-delà duquel le volume de la substance dépasse 50 litres dans le bassin. En donner la valeur en heure et minute, arrondie à la minute.

Corrigé

Partie A : modèle discret 1. On applique la relation de récurrence à partir de $V_0 = 0$:

$$V_1 = 0,995 \times V_0 + 6 = 0,995 \times 0 + 6 = 6,$$

$$V_2 = 0,995 \times V_1 + 6 = 0,995 \times 6 + 6 = 5,97 + 6 = 11,97.$$

Une heure après le début de la pollution, le bassin contient 6 litres de substance polluante ; après deux heures, 11,97 litres.

2. La variable v doit contenir $V_0 = 0$ avant la boucle, puis la boucle **for** applique n fois la relation $V_{k+1} = 0,995 V_k + 6$ (une fois pour chaque valeur de k de 0 à $n - 1$) : après le k^{e} passage, v contient V_k , et à la sortie de la boucle, V_n .

```
def volume(n):
    v = 0                                # V_0 = 0
    for k in range(n):                  # n passages : de V_0 à V_n
        v = 0.995 * v + 6               # V_{k+1} = 0,995 V_k + 6
    return v
```

Ainsi `volume(2)` renvoie 11,97, conformément à la question 1.

3. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , la propriété $P(n)$: « $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ » est vraie.

Initialisation. Pour $n = 0$: $V_0 = 0$ et $V_1 = 6$, donc $V_0 \leq V_1 \leq 1200$. La propriété $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que, pour un certain entier naturel k , $P(k)$ soit vraie : $V_k \leq V_{k+1} \leq 1200$. Montrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $V_{k+1} \leq V_{k+2} \leq 1200$.

On multiplie les trois membres de l'hypothèse de récurrence par $0,995 > 0$, ce qui conserve l'ordre, puis on ajoute 6 :

$$V_k \leq V_{k+1} \leq 1200 \implies 0,995 V_k \leq 0,995 V_{k+1} \leq 0,995 \times 1200 = 1194$$

$$\implies 0,995 V_k + 6 \leq 0,995 V_{k+1} + 6 \leq 1194 + 6 = 1200.$$

Or $0,995 V_k + 6 = V_{k+1}$ et $0,995 V_{k+1} + 6 = V_{k+2}$, d'où $V_{k+1} \leq V_{k+2} \leq 1200$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

Ce que le correcteur attend : l'hérédité repose sur le fait que la fonction $x \mapsto 0,995x + 6$ est croissante (coefficient $0,995 > 0$) : c'est ce qui permet de « passer » l'inégalité au rang suivant, et le calcul $0,995 \times 1200 + 6 = 1200$ doit apparaître explicitement.

4. D'après la question 3, pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1}$: la suite (V_n) est croissante ; et $V_{n+1} \leq 1200$ pour tout n , avec $V_0 = 0 \leq 1200$: la suite est majorée par 1200. D'après le **théorème de convergence monotone**, une suite croissante et majorée converge : la suite (V_n) converge vers un réel ℓ , avec $\ell \leq 1200$.

Pour calculer ℓ , on remarque que $V_{n+1} = f(V_n)$ avec $f(x) = 0,995x + 6$, fonction affine donc continue sur $\mathbb{R}$. Puisque (V_n) converge vers ℓ , la suite (V_{n+1}) converge aussi vers ℓ et, par

continuité de f , la suite $(f(V_n))$ converge vers $f(\ell)$. Par unicité de la limite, ℓ est un point fixe de f :

$$\ell = 0,995\ell + 6 \iff 0,005\ell = 6 \iff \ell = \frac{6}{0,005} = 1200.$$

La suite (V_n) converge vers 1200 : à long terme, le volume de substance polluante se stabilise autour de 1200 litres.

Vérification par la forme explicite : en posant $W_n = V_n - 1200$, on obtient $W_{n+1} = 0,995V_n + 6 - 1200 = 0,995(V_n - 1200) = 0,995W_n$: (W_n) est géométrique de raison 0,995 et de premier terme $W_0 = -1200$, donc $V_n = 1200(1 - 0,995^n)$. Comme $0 < 0,995 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,995^n = 0$ et l'on retrouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1200$.

Partie B : modèle continu 1.a. L'équation (E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,005 \neq 0$ et $b = 6$. Cherchons d'abord la solution particulière constante : si $y(t) = c$ pour tout t , alors $y' = 0$ et $0 = -0,005c + 6$, soit $c = \frac{6}{0,005} = 1200$. D'après le théorème du cours sur les solutions de $y' = ay + b$, les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions

$$y(t) = Ce^{-0,005t} + 1200, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(On retrouve $-\frac{b}{a} = -\frac{6}{-0,005} = 1200$.)

1.b. La fonction v est solution de (E) : il existe un réel C tel que, pour tout $t \geq 0$, $v(t) = Ce^{-0,005t} + 1200$. La condition initiale $v(0) = 0$ donne

$$Ce^0 + 1200 = 0 \iff C + 1200 = 0 \iff C = -1200.$$

Ainsi, pour tout réel t de $[0; +\infty[$:

$$v(t) = -1200e^{-0,005t} + 1200 = 1200(1 - e^{-0,005t}).$$

1.c. Quand $t \rightarrow +\infty$, $-0,005t \rightarrow -\infty$ et, comme $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, le théorème de la limite d'une fonction composée donne $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,005t} = 0$. Par différence puis produit :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 1200 \times (1 - 0) = 1200.$$

La droite d'équation $y = 1200$ est asymptote horizontale à la courbe de v en $+\infty$: le volume de polluant tend vers 1200 litres, comme dans le modèle discret.

1.d. La fonction v est dérivable sur $[0; +\infty[$ et, avec $(e^u)' = u'e^u$ pour $u(t) = -0,005t$:

$$v'(t) = 1200 \times (0 - (-0,005)e^{-0,005t}) = 1200 \times 0,005e^{-0,005t} = 6e^{-0,005t}.$$

Pour tout réel t , $e^{-0,005t} > 0$, donc $v'(t) > 0$ sur $[0; +\infty[$: la fonction v est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. (On peut aussi lire ce résultat sur (E) : $v'(t) = -0,005v(t) + 6 = 0,005(1200 - v(t)) > 0$ puisque $v(t) < 1200$.)

2. Le seuil de nettoyage correspond à 5 % du volume du bassin, soit

$$\frac{5}{100} \times 30\,000 = 1500 \text{ litres.}$$

Or, pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,005t} > 0$, donc $1 - e^{-0,005t} < 1$ et $v(t) < 1200$. Le volume de substance polluante reste donc toujours strictement inférieur à 1200 litres, a fortiori inférieur à 1500

litres : le taux de polluant ne dépasse jamais 5 %. Selon ce modèle, le propriétaire n'aura pas à procéder à un nettoyage complet.

Ce que le correcteur attend : il ne suffit pas de dire que la limite 1200 est inférieure à 1500 ; il faut justifier que $v(t)$ ne dépasse jamais 1200 (ici parce que v est croissante de limite 1200, ou directement par $e^{-0,005t} > 0$).

3. On résout d'abord l'équation $v(t) = 50$:

$$1200(1 - e^{-0,005t}) = 50 \iff 1 - e^{-0,005t} = \frac{50}{1200} = \frac{1}{24} \iff e^{-0,005t} = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}.$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on peut appliquer $\ln$ aux deux membres (strictement positifs) :

$$e^{-0,005t} = \frac{23}{24} \iff -0,005t = \ln\left(\frac{23}{24}\right) \iff t = -\frac{1}{0,005} \ln\left(\frac{23}{24}\right),$$

soit, puisque $\frac{1}{0,005} = 200$ et $-\ln\left(\frac{23}{24}\right) = \ln\left(\frac{24}{23}\right)$:

$$t = -200 \ln\left(\frac{23}{24}\right) = 200 \ln\left(\frac{24}{23}\right).$$

Notons $t_0 = 200 \ln\left(\frac{24}{23}\right)$. Comme v est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ (question **1.d**), on a $v(t) > 50$ si et seulement si $t > t_0$: l'instant au-delà duquel le volume dépasse 50 litres est exactement

$$t_0 = 200 \ln\left(\frac{24}{23}\right) \text{ heures.}$$

À la calculatrice, $t_0 \approx 8,5119$ h. La partie décimale vaut $0,5119 \times 60 \approx 30,7$ minutes, donc $t_0 \approx 8$ h 31 min (arrondi à la minute). Le volume de substance polluante dépasse 50 litres au-delà de 8 heures et 31 minutes environ après le début de la pollution.

Ce que le correcteur attend : la valeur exacte est demandée avant la valeur approchée, et la conversion en minutes se fait sur la partie décimale de l'heure ($0,5119$ h $\neq$ 51 min). L'écriture $-200 \ln\left(\frac{23}{24}\right)$ est aussi acceptée.

Exercice 3

Sujet — Exercice 3 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On désigne par « musiciens professionnels » l'ensemble des femmes et hommes pratiquant un instrument de manière professionnelle.

1. Une étude a été réalisée auprès des musiciens professionnels pratiquant différents genres musicaux (Pop, Rap, Rock, Classique, etc.).

Cette étude indique que :

- 52 % des musiciens professionnels jouent de la Pop ;
- parmi les musiciens professionnels jouant de la Pop, 32 % sont des femmes ;
- 20 % des musiciens professionnels sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans l'ensemble des musiciens professionnels. On note :

- O l'évènement : « la personne joue de la Pop » ;
- F l'évènement : « la personne est une femme ».

Affirmation 1 : Si la personne choisie est une femme, alors la probabilité qu'elle joue de la Pop est de 0,832.

2. La proportion de musiciens professionnels au sein de la population active dans le secteur de la culture est estimée à 6,2 %.

On prélève au hasard et de manière indépendante un échantillon de 5 000 personnes au sein de cette population. La population considérée est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout échantillon ainsi défini, associe le nombre de musiciens professionnels dans l'échantillon.

Affirmation 2 : En arrondissant le résultat au dixième, on a $P(X \leq 340) \approx 0,4$.

Affirmation 3 : En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut affirmer qu'il y a plus de 95 % de chance que, sur cet échantillon de 5 000 actifs dans le secteur de la culture, le nombre de musiciens professionnels soit strictement compris entre 230 et 390.

3. Un jeu sur le thème de la culture de la Pop est proposé à 10 personnes dont 4 sont des musiciens professionnels. Deux équipes de 5 joueurs s'affrontent. Elles sont chacune constituées de 2 musiciens professionnels et de 3 personnes qui ne le sont pas.

Affirmation 4 : On peut former ainsi 120 équipes différentes.

Corrigé

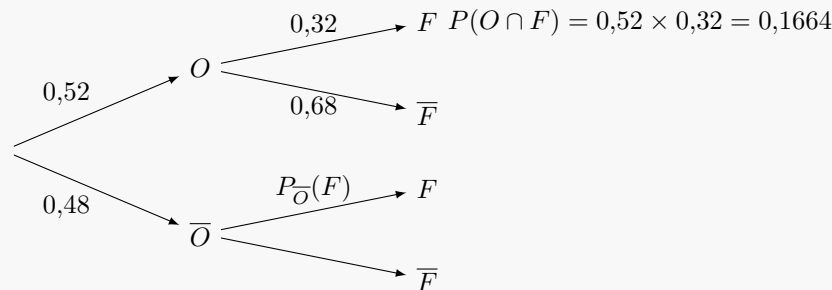
1. **Affirmation 1 : VRAIE.**

Traduisons les données de l'énoncé avec les évènements O et F :

- « 52 % des musiciens jouent de la Pop » : $P(O) = 0,52$;

- « parmi ceux qui jouent de la Pop, 32 % sont des femmes » : c'est une probabilité conditionnelle, $P_O(F) = 0,32$;
- « 20 % des musiciens sont des femmes » : $P(F) = 0,20$.

On peut résumer la situation par l'arbre pondéré suivant (première branche : le genre musical, seconde : le sexe) :



L'affirmation porte sur la probabilité que la personne joue de la Pop *sachant* que c'est une femme, c'est-à-dire $P_F(O)$ (et non $P_O(F)$: le conditionnement est renversé). Par définition de la probabilité conditionnelle, comme $P(F) = 0,20 \neq 0$:

$$P_F(O) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)}.$$

Or, d'après la règle du produit le long d'un chemin de l'arbre, $P(O \cap F) = P(O) \times P_O(F) = 0,52 \times 0,32 = 0,1664$. Donc

$$P_F(O) = \frac{0,1664}{0,20} = 0,832.$$

Si la personne choisie est une femme, la probabilité qu'elle joue de la Pop est bien 0,832 : **l'affirmation 1 est vraie.**

Ce que le correcteur attend : la distinction entre $P_O(F) = 0,32$ (donnée) et $P_F(O)$ (demandée), et le passage par $P(O \cap F)$. Le résultat $0,832 > 0,52 = P(O)$ est cohérent : les femmes sont sur-représentées dans la Pop (32 % contre 20 % dans l'ensemble).

2. Affirmation 2 : FAUSSE.

Le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise : on répète 5 000 fois, de manière identique et indépendante, l'épreuve de Bernoulli « la personne prélevée est un musicien professionnel », de succès de probabilité $p = 0,062$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès : elle suit la **loi binomiale** de paramètres $n = 5\,000$ et $p = 0,062$, notée $\mathcal{B}(5\,000; 0,062)$. Ses indicateurs sont

$$E(X) = np = 5\,000 \times 0,062 = 310, \quad V(X) = np(1-p) = 5\,000 \times 0,062 \times 0,938 = 290,78,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{290,78} \approx 17,05.$$

À la calculatrice (fonction de répartition binomiale, `binomFRép(5000, 0.062, 340)` ou équivalent) :

$$P(X \leq 340) = \sum_{k=0}^{340} \binom{5\,000}{k} 0,062^k 0,938^{5\,000-k} \approx 0,962.$$

En arrondissant au dixième, $P(X \leq 340) \approx 1,0$ et non 0,4 : **l'affirmation 2 est fausse.**

Sans calculatrice, on peut déjà voir qu'elle est fausse : 340 est supérieur à l'espérance 310 (de presque deux écarts-types, car $310 + 2 \times 17,05 \approx 344$), donc $P(X \leq 340)$ est nettement supérieure à $\frac{1}{2}$, ce qui exclut la valeur 0,4.

Ce que le correcteur attend : la loi de X nommée avec ses paramètres et la justification du modèle (répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, tirage assimilé à un tirage avec remise).

Affirmation 3 : VRAIE.

L'évènement « le nombre de musiciens professionnels est strictement compris entre 230 et 390 » s'écrit $230 < X < 390$. Comme $E(X) = 310$ et que $230 = 310 - 80$ et $390 = 310 + 80$, cet intervalle est centré sur l'espérance :

$$230 < X < 390 \iff -80 < X - 310 < 80 \iff |X - 310| < 80 \iff |X - E(X)| < 80.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à X (qui admet une espérance et une variance) avec $\epsilon = 80 > 0$ donne

$$P(|X - E(X)| \geq 80) \leq \frac{V(X)}{80^2} = \frac{290,78}{6\,400} \approx 0,0454.$$

En passant à l'évènement contraire :

$$P(230 < X < 390) = P(|X - E(X)| < 80) = 1 - P(|X - E(X)| \geq 80) \geq 1 - \frac{290,78}{6\,400} \approx 0,9546.$$

Comme $0,9546 > 0,95$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer qu'il y a plus de 95 % de chance que le nombre de musiciens professionnels soit strictement compris entre 230 et 390 : **l'affirmation 3 est vraie.**

Ce que le correcteur attend : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev majore la probabilité de l'évènement $|X - E(X)| \geq \epsilon$ (l'écart « grand ») ; c'est le passage au contraire qui minore la probabilité de l'intervalle. Il faut aussi vérifier que l'intervalle est bien centré en $E(X)$, sans quoi l'inégalité ne s'applique pas directement. (La probabilité réelle, calculée avec la loi binomiale, dépasse 0,999 : Bienaymé-Tchebychev ne donne qu'une minoration, mais elle suffit ici.)

3. Affirmation 4 : VRAIE.

Une équipe est un ensemble de 5 personnes : l'ordre dans lequel on choisit ses membres n'a pas d'importance et une personne ne peut pas figurer deux fois. Former une équipe revient à effectuer successivement deux choix indépendants l'un de l'autre :

- choisir les 2 musiciens professionnels parmi les 4 : il y a $\binom{4}{2}$ combinaisons possibles ;
- choisir les 3 personnes non musiciennes parmi les $10 - 4 = 6$ autres : il y a $\binom{6}{3}$ combinaisons possibles.

D'après le principe multiplicatif, le nombre d'équipes différentes est

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times 20 = 120.$$

On peut donc former 120 équipes différentes : **l'affirmation 4 est vraie.**

Ce que le correcteur attend : l'affirmation compte les équipes (les ensembles de 5 joueurs vérifiant la contrainte), pas les façons de répartir les 10 personnes en deux équipes ; comme chaque équipe détermine l'équipe adverse (les 5 personnes restantes, qui contiennent bien 2 musiciens et 3 non-musiciens), il y a $\frac{120}{2} = 60$ répartitions possibles en deux équipes, mais ce n'est pas ce qui est demandé.

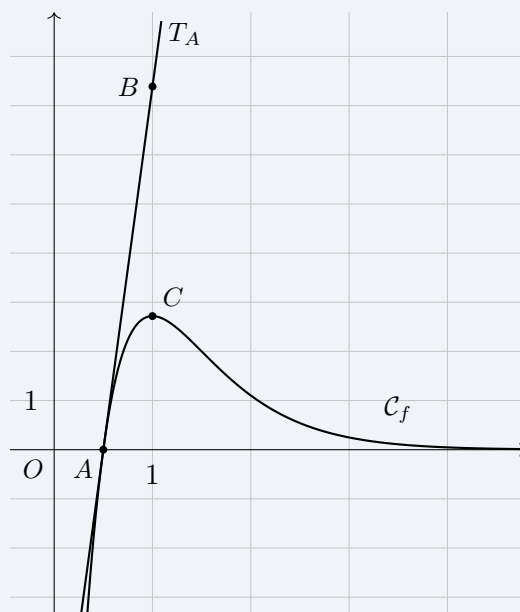
Exercice 4

Sujet — Exercice 4 — 6 points

Partie A Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ dont on donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal. On note f' sa fonction dérivée.

On précise que :

- la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C d'abscisse 1 ;
- la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ passe par le point $B(1; e^2)$.



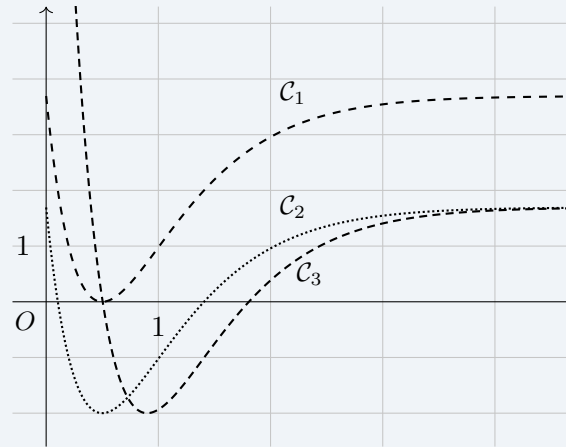
1. À l'aide du graphique ci-dessus :

1.a. Donner $f'(1)$.

1.b. Donner la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0; 3]$.

2. Déterminer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Parmi les trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ci-dessous, deux représentent des primitives de la fonction f . Indiquer lesquelles et justifier.



Partie

B

Un industriel doit créer un logo représentant la forme ci-contre (Fig. 1). La dimension de 0,3 cm indiquée sur la figure est une contrainte imposée par le client.

L'industriel choisit de modéliser le contour de ce logo à l'aide d'une portion de la courbe de la fonction f vue en partie A, et de l'image de cette portion par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, sur un intervalle $[0,5; \alpha]$. Le nombre α est un réel supérieur à 1 que l'on déterminera dans cette partie.

L'ensemble est représenté graphiquement dans un repère orthonormé (Fig. 2) d'unité 1 cm.

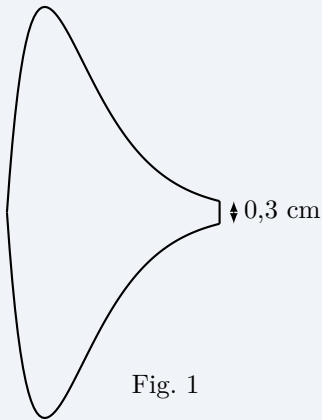


Fig. 1

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3}.$$

1.a. Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$f(x) = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}.$$

1.b. En déduire la limite de f en $+\infty$. (On pourra poser $X = 2x - 1$.)

2.a. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f'(x) = (-4x + 4)e^{-2x+3}$.

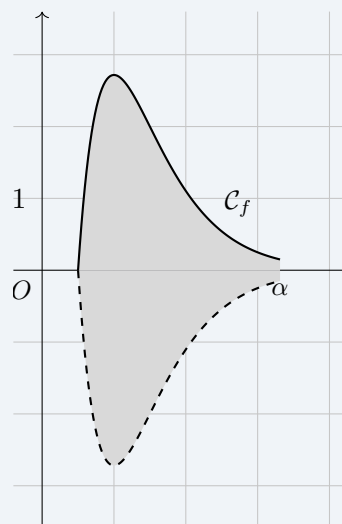


Fig. 2

2.b. Construire le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. Justifier que la contrainte imposée par le client se traduit par l'égalité $f(\alpha) = 0,15$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de α dans l'intervalle $[1; +\infty[$ qui permette de vérifier cette égalité. En donner une valeur arrondie au dixième.

Partie C On fabrique un porte-clé en découpant une plaque d'acier suivant la forme du logo représenté par la surface grisée en figure 2 de la partie B. On précise que cette plaque a une épaisseur de 0,2 cm.

1. On considère :

$$I = \int_{0,5}^{3,3} f(x) dx.$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale I arrondie au dixième est égale à 3,6.

2. On précise que le volume du porte-clé est égal à :

$$\text{Aire du logo} \times \text{épaisseur de la plaque}.$$

Déterminer le volume du porte-clé en cm^3 , arrondi au dixième.

Corrigé

Partie A **1.a.** Le nombre dérivé $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point C d'abscisse 1. Cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses, donc son coefficient directeur est nul : $f'(1) = 0$. (Graphiquement, C est le sommet de la courbe : f atteint son maximum en 1.)

1.b. Les solutions de $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses. Sur $[0; 3]$, la courbe coupe cet axe en un seul point, le point $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$: elle est en dessous de l'axe avant A et au-dessus après. L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $[0; 3]$: $x = \frac{1}{2}$.

2. Le nombre dérivé $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A à C_f au point A .

Cette droite passe par $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et $B(1; e^2)$, donc

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{e^2}{\frac{1}{2}} = 2e^2 \approx 14,78.$$

3. Soit F une primitive de f sur $[0; +\infty[$: par définition, $F' = f$, donc les variations de F sont données par le *signe* de f , que l'on lit sur $\mathcal{C}_f$:

- sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, la courbe est sous l'axe des abscisses : $f(x) < 0$, donc F est strictement décroissante ;
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ (question 1.b) ;
- sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, la courbe est au-dessus de l'axe : $f(x) > 0$, donc F est strictement croissante.

Toute primitive de f admet donc un minimum en $x = \frac{1}{2}$, et en ce point sa courbe a une tangente horizontale (car $F'\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$).

- La courbe $\mathcal{C}_1$ décroît puis croît, avec un minimum au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ (elle touche l'axe des abscisses en ce point) : compatible.
- La courbe $\mathcal{C}_2$ décroît puis croît, avec un minimum au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ (d'ordonnée -2) : compatible.
- La courbe $\mathcal{C}_3$ décroît puis croît, mais son minimum est atteint pour une abscisse voisine de 0,9, différente de $\frac{1}{2}$: sur $\left[\frac{1}{2}; 0,9\right]$ elle décroît alors que $f > 0$ y imposerait la croissance. Elle ne représente pas une primitive de f .

De plus, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante : $\mathcal{C}_2$ se déduit de $\mathcal{C}_1$ par une translation verticale (de -2 unités), ce qui est cohérent, alors que $\mathcal{C}_3$ ne se déduit d'aucune des deux par une translation *verticale* (elle a la même asymptote horizontale que $\mathcal{C}_2$, mais son minimum est décalé vers la droite). Les courbes représentant des primitives de f sont donc $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Ce que le correcteur attend : l'argument est le lien « signe de $f \Rightarrow$ variations de F », avec la position exacte du minimum en $\frac{1}{2}$; l'observation « translatées l'une de l'autre » confirme mais ne suffit pas seule.

Partie B 1.a. Pour tout réel $x \geq 0$, on écrit l'exposant sous la forme $-2x + 3 = 2 - (2x - 1)$. D'après les propriétés de l'exponentielle ($e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$) :

$$e^{-2x+3} = e^{2-(2x-1)} = \frac{e^2}{e^{2x-1}}, \quad \text{donc} \quad f(x) = (2x-1) \times \frac{e^2}{e^{2x-1}} = e^2 \times \frac{2x-1}{e^{2x-1}}.$$

1.b. Posons $X = 2x - 1$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$, et $f(x) = e^2 \times \frac{X}{e^X}$. Par croissances comparées, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc, par passage à l'inverse, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$. D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, puis par produit par la constante e^2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^2 \times 0 = 0.$$

La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, ce que confirme le graphique de la partie A.

Ce que le correcteur attend : sans la transformation d'écriture, $\lim(2x-1) = +\infty$ et $\lim e^{-2x+3} = 0$ donnent la forme indéterminée « $\infty \times 0$ » : il faut la lever par la croissance comparée, d'où l'intérêt de la question 1.a.

2.a. La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit de $u : x \mapsto 2x - 1$ (dérivable, $u'(x) = 2$) et de $w : x \mapsto e^{-2x+3}$ (dérivable comme composée, $w'(x) = -2e^{-2x+3}$ d'après $(e^v)' = v'e^v$). Avec $(uw)' = u'w + uw'$:

$$f'(x) = 2e^{-2x+3} + (2x-1) \times (-2)e^{-2x+3} = (2-4x+2)e^{-2x+3} = (-4x+4)e^{-2x+3}.$$

2.b. Pour tout réel x , $e^{-2x+3} > 0$: le signe de $f'(x)$ est celui de $-4x+4 = 4(1-x)$, qui est strictement positif sur $[0; 1[$, nul en 1 et strictement négatif sur $]1; +\infty[$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. Les valeurs remarquables sont

$$f(0) = (0-1)e^3 = -e^3 \approx -20,09, \quad f(1) = (2-1)e^{-2+3} = e \approx 2,72, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-e^3$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

La valeur 0 à droite est une limite, non atteinte. On retrouve $f'(1) = 0$ et le maximum e au point C (partie A), ainsi que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^2$.

3. Traduction de la contrainte. Le contour du logo est formé, au-dessus de l'axe des abscisses, de la portion de $\mathcal{C}_f$ sur $[0,5; \alpha]$ et, en dessous, de son image par la symétrie d'axe (Ox) , c'est-à-dire la courbe de $-f$. Pour $x \geq \frac{1}{2}$, on a $2x-1 \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$: à l'abscisse α , le point haut du contour a pour ordonnée $f(\alpha)$ et le point bas $-f(\alpha)$. La largeur du logo à son extrémité droite, mesurée verticalement, vaut donc $f(\alpha) - (-f(\alpha)) = 2f(\alpha)$. Le repère étant orthonormé d'unité 1 cm, la contrainte « 0,3 cm » s'écrit

$$2f(\alpha) = 0,3 \iff f(\alpha) = 0,15.$$

Existence et unicité. Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante (question 2.b), avec $f(1) = e \approx 2,72$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Comme $0 < 0,15 < e$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection, étendu à un intervalle non borné en remplaçant $f(b)$ par la limite en $+\infty$) assure que l'équation $f(x) = 0,15$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$.

Valeur approchée. À la calculatrice :

$$f(3,3) = 5,6e^{-3,6} \approx 0,153 > 0,15 \quad \text{et} \quad f(3,4) = 5,8e^{-3,8} \approx 0,130 < 0,15,$$

donc, f étant strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, $3,3 < \alpha < 3,4$. Pour arrondir au dixième, on teste le milieu : $f(3,35) = 5,7e^{-3,7} \approx 0,141 < 0,15$, donc $3,3 < \alpha < 3,35$ et $\alpha \approx 3,3$ (au dixième). Une valeur plus précise est $\alpha \approx 3,312$.

Ce que le correcteur attend : les trois hypothèses du corollaire (continuité, stricte monotonie, valeur cible comprise entre les images ou limites aux bornes) doivent être citées ; l'unicité sur $[1; +\infty[$ est due à la stricte décroissance. (Sur $[0; 1]$, l'équation $f(x) = 0,15$ a aussi une solution, voisine de 0,51, mais $\alpha > 1$ par hypothèse.)

Partie C 1. On a $I = \int_{0,5}^{3,3} (2x - 1) e^{-2x+3} dx$. Posons, pour appliquer la formule $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$:

$$\begin{cases} u'(x) = e^{-2x+3} & \implies u(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x+3}, \\ v(x) = 2x - 1 & \implies v'(x) = 2. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,5; 3,3]$ et leurs dérivées y sont continues. Par intégration par parties :

$$I = \left[-\frac{1}{2} (2x - 1) e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x+3} \right) \times 2 dx,$$

soit

$$I = \left[-\frac{1}{2} (2x - 1) e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3} dx.$$

Une primitive de $x \mapsto e^{-2x+3}$ est $x \mapsto -\frac{1}{2} e^{-2x+3}$. Calculons les deux termes :

$$\left[-\frac{1}{2} (2x - 1) e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} = -\frac{1}{2} \times 5,6 e^{-3,6} - \left(-\frac{1}{2} \times 0 \times e^2 \right) = -2,8 e^{-3,6},$$

$$\int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} = -\frac{1}{2} e^{-3,6} + \frac{1}{2} e^2.$$

D'où la valeur exacte

$$I = -2,8 e^{-3,6} - 0,5 e^{-3,6} + \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} - 3,3 e^{-3,6}.$$

Numériquement, $\frac{e^2}{2} \approx 3,6945$ et $3,3 e^{-3,6} \approx 0,0902$, donc $I \approx 3,6044$, soit $I \approx 3,6$ arrondi au dixième.

Remarque. Le calcul montre que $F(x) = -x e^{-2x+3}$ est une primitive de f (on vérifie : $F'(x) = -e^{-2x+3} + 2x e^{-2x+3} = (2x - 1) e^{-2x+3}$), et $I = F(3,3) - F(0,5)$. Les primitives $F + C$ ont un minimum en $\frac{1}{2}$ et tendent vers C en $+\infty$: c'est bien l'allure de $\mathcal{C}_1$ (avec $C = \frac{e^2}{2}$) et de $\mathcal{C}_2$ (avec $C = \frac{e^2}{2} - 2$) de la partie A.

2. La surface grisée est délimitée, sur $[0,5; \alpha]$ avec $\alpha \approx 3,3$, par la courbe de f (au-dessus) et celle de $-f$ (en dessous). Comme $f \geq 0$ sur cet intervalle, son aire est

$$\mathcal{A} = \int_{0,5}^{3,3} (f(x) - (-f(x))) dx = 2 \int_{0,5}^{3,3} f(x) dx = 2I \approx 7,209 \text{ cm}^2,$$

l'unité d'aire valant 1 cm^2 puisque le repère est orthonormé d'unité 1 cm . (Par symétrie, l'aire de la moitié inférieure est égale à celle de la moitié supérieure, qui vaut I . Remplacer $\alpha \approx 3,312$ par la borne $3,3$ de l'intégrale I néglige une bande de largeur $0,012$ et de hauteur $0,3$ au plus, d'aire inférieure à $0,004 \text{ cm}^2$: sans effet sur l'arrondi demandé.) Le volume du porte-clé est alors

$$\mathcal{V} = \mathcal{A} \times 0,2 = 2I \times 0,2 = 0,4I \approx 0,4 \times 3,6044 \approx 1,4418 \text{ cm}^3.$$

Le volume du porte-clé est d'environ $1,4 \text{ cm}^3$ (arrondi au dixième).

Ce que le correcteur attend : l'aire du logo est $2I$ et non I (la partie symétrique compte), et l'on utilise la valeur non arrondie de I pour arrondir le résultat final ; ici $0,4 \times 3,6 = 1,44$ conduit au même arrondi $1,4$.