

Mathématiques

Baccalauréat général 2026 — épreuve de spécialité

Polynésie, session 2026 (26-MATJ1PO1)

Corrigé

Quatre exercices

Exercice 1

Sujet — Exercice 1 — 5 points

Une école de surf travaille avec des planches en mousse pour les cours débutants, et d'autres en résine pour les cours de perfectionnement. Les planches en mousse représentent 80 % du stock de l'école.

La gérante observe qu'après chaque saison,

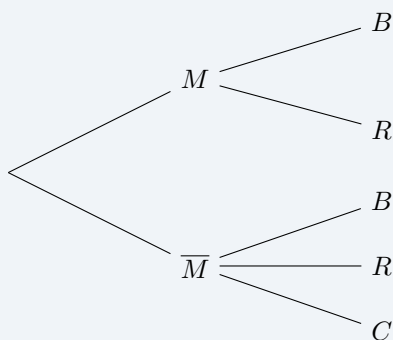
- 75 % des planches en mousse sont en bon état et réutilisables la saison suivante. Les autres sont recyclées (et donc non réutilisables) ;
- 60 % des planches en résine sont en bon état, les autres sont soit consolidées, soit recyclées.

Après une saison, on choisit une planche au hasard et on s'intéresse aux événements suivants :

- M : « La planche est en mousse » ;
- B : « La planche est en bon état » ;
- R : « La planche sera recyclée » ;
- C : « La planche sera consolidée ».

Partie A 1. Recopier et compléter sur la copie l'arbre pondéré ci-dessous avec les données de l'énoncé.

Il sera complété au fur et à mesure de l'exercice.



2. On sait que $P(\overline{M} \cap R) = 0,05$.

2.a. Interpréter cette égalité dans le contexte de l'exercice.

2.b. On a choisi une planche en résine. Démontrer que la probabilité que cette planche soit consolidée pour la saison suivante est 0,15.

3. La gérante affirme qu'après une saison, au moins $\frac{3}{4}$ des planches sont en bon état. A-t-elle raison ?

Partie B La gérante du club de surf envisage de proposer à certains clients une remise pour la saison suivante.

Pour cela, elle imagine le jeu suivant qui sera proposé à chaque client :

Une urne contient 5 boules noires et un nombre n de boules rouges.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Le client tire simultanément deux boules dans l'urne.

Si les deux boules sont de même couleur, le client gagne une remise, sinon, il perd le jeu et n'obtient pas de remise.

1. Justifier que la probabilité p de gagner une remise est :

$$\frac{\binom{5}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}}.$$

2. En déduire que la probabilité p peut s'écrire :

$$\frac{20 + n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

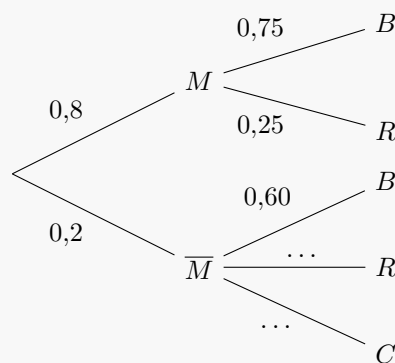
3. La gérante souhaite s'assurer que la probabilité de gagner est inférieure à $\frac{1}{2}$. Déterminer pour cela l'ensemble des valeurs possibles du nombre n de boules rouges qu'elle peut mettre dans l'urne.

Corrigé

Partie A 1. Les données de l'énoncé se traduisent ainsi :

- « les planches en mousse représentent 80 % du stock » donne $P(M) = 0,8$, d'où $P(\overline{M}) = 1 - 0,8 = 0,2$;
- « 75 % des planches en mousse sont en bon état » est une probabilité *conditionnelle* : $P_M(B) = 0,75$. Les autres planches en mousse sont recyclées, donc $P_M(R) = 1 - 0,75 = 0,25$ (une planche en mousse n'est jamais consolidée : c'est pourquoi aucune branche C ne part de M) ;
- « 60 % des planches en résine sont en bon état » donne $P_{\overline{M}}(B) = 0,60$.

Les deux branches R et C issues de $\overline{M}$ ne sont pas données par l'énoncé : la question 2.b les déterminera. L'arbre complété avec les seules données de l'énoncé est donc :



2.a. L'événement $\overline{M} \cap R$ est réalisé lorsque la planche choisie est *à la fois* en résine (donc pas en mousse) et destinée à être recyclée. L'égalité $P(\overline{M} \cap R) = 0,05$ signifie donc : la probabilité que

la planche choisie au hasard soit une planche en résine qui sera recyclée vaut 0,05 ; autrement dit, 5 % des planches de l'école sont des planches en résine qui seront recyclées.

Ce que le correcteur attend : une intersection, pas un conditionnement. Il ne s'agit **pas** de « 5 % des planches en résine seront recyclées » (ce serait $P_{\overline{M}}(R)$), mais de 5 % de *l'ensemble* des planches.

2.b. La probabilité d'un chemin de l'arbre est le produit des probabilités portées par ses branches :

$$P(\overline{M} \cap R) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(R).$$

Comme $P(\overline{M}) = 0,2 \neq 0$, on en déduit

$$P_{\overline{M}}(R) = \frac{P(\overline{M} \cap R)}{P(\overline{M})} = \frac{0,05}{0,2} = 0,25.$$

Une planche en résine est en bon état, ou consolidée, ou recyclée : les trois branches B , R et C issues de $\overline{M}$ décrivent trois éventualités incompatibles qui recouvrent tous les cas. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1, donc

$$P_{\overline{M}}(B) + P_{\overline{M}}(R) + P_{\overline{M}}(C) = 1,$$

c'est-à-dire

$$P_{\overline{M}}(C) = 1 - 0,60 - 0,25 = 0,15.$$

Sachant que la planche choisie est en résine, la probabilité qu'elle soit consolidée pour la saison suivante est bien 0,15. L'arbre est ainsi complété : la branche R issue de $\overline{M}$ porte 0,25 et la branche C porte 0,15.

3. Les événements M et $\overline{M}$ sont de probabilités non nulles et forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(M \cap B) + P(\overline{M} \cap B) = P(M) \times P_M(B) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(B).$$

D'où

$$P(B) = 0,8 \times 0,75 + 0,2 \times 0,60 = 0,60 + 0,12 = 0,72.$$

Or $\frac{3}{4} = 0,75$ et $0,72 < 0,75$. La proportion de planches en bon état après une saison est donc de 72 %, ce qui est *strictement inférieur* aux trois quarts : **la gérante a tort**.

Ce que le correcteur attend : la formule des probabilités totales écrite avant le calcul, la comparaison menée avec $\frac{3}{4}$ converti en 0,75, et une conclusion rédigée dans le contexte (et non le seul nombre 0,72).

Partie B 1. L'urne contient 5 boules noires et n boules rouges, soit $n + 5$ boules au total, indiscernables au toucher : tous les tirages de deux boules sont *équiprobables*. Le client tire les deux boules *simultanément* : l'ordre n'intervient pas et il n'y a pas de répétition possible. Un tirage est donc une combinaison de 2 boules parmi $n + 5$, et le nombre de tirages possibles est

$$\binom{n+5}{2}.$$

L'événement « gagner une remise » est « les deux boules sont de même couleur » ; il est la réunion des deux événements *incompatibles* « les deux boules sont noires » et « les deux boules sont rouges ». Les tirages qui leur sont favorables sont respectivement au nombre de $\binom{5}{2}$ et de

$\binom{n}{2}$. Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité est le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles :

$$p = \frac{\binom{5}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}}.$$

2. D'après la formule $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n+5}{2} = \frac{(n+5)(n+4)}{2}.$$

En reportant, puis en multipliant le numérateur et le dénominateur par 2 :

$$p = \frac{10 + \frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} = \frac{2 \times \left(10 + \frac{n(n-1)}{2}\right)}{(n+5)(n+4)} = \frac{20 + n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

3. Le nombre n est un entier naturel, donc $(n+5)(n+4) > 0$: on peut multiplier l'inéquation par ce dénominateur sans en changer le sens.

$$\begin{aligned} p < \frac{1}{2} &\iff \frac{20 + n(n-1)}{(n+5)(n+4)} < \frac{1}{2} \\ &\iff 2(20 + n(n-1)) < (n+5)(n+4) \\ &\iff 40 + 2n^2 - 2n < n^2 + 9n + 20 \\ &\iff n^2 - 11n + 20 < 0. \end{aligned}$$

Étudions le signe du trinôme $T(n) = n^2 - 11n + 20$. Son discriminant vaut

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \times 1 \times 20 = 121 - 80 = 41 > 0,$$

donc T admet deux racines réelles :

$$n_1 = \frac{11 - \sqrt{41}}{2} \approx 2,30 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{11 + \sqrt{41}}{2} \approx 8,70.$$

Le coefficient dominant est $1 > 0$: le trinôme est strictement négatif *entre* les racines, c'est-à-dire pour $n \in \left] \frac{11 - \sqrt{41}}{2}; \frac{11 + \sqrt{41}}{2} \right[$. Comme n est un entier naturel, on obtient

$$n \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}.$$

La gérante peut donc mettre 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 boules rouges dans l'urne.

Contrôle des valeurs limites : pour $n = 2$, $p = \frac{20+2}{7 \times 6} = \frac{22}{42} \approx 0,524 > 0,5$; pour $n = 3$, $p = \frac{26}{56} \approx 0,464 < 0,5$; pour $n = 8$, $p = \frac{76}{156} \approx 0,487 < 0,5$; pour $n = 9$, $p = \frac{92}{182} \approx 0,505 > 0,5$. Les bornes 3 et 8 sont bien les valeurs extrêmes convenables.

Ce que le correcteur attend : ne pas « passer au produit en croix » sans justifier la positivité du dénominateur, et surtout conclure par un ensemble d'entiers — un intervalle de réels ne répond pas à la question, puisque n est un nombre de boules.

Exercice 2

Sujet — Exercice 2 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

Affirmation 1 : La limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$.

Affirmation 2 : La fonction g est convexe sur l'intervalle $[-2; +\infty[$.

3. **Affirmation 3 :** Une intégration par parties permet d'obtenir :

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = -\pi.$$

4. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y - 5$ et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{3}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}$.

Affirmation 4 : La fonction h est la solution de (E) qui vaut 1 en 0.

5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python :

```
1 def mystere(n):  
2     f = 1  
3     for k in range(1, n+1):  
4         f = f * k  
5     return f
```

Affirmation 5 : Le nombre renvoyé lors de l'exécution de `mystere(5)` est 120.

Corrigé

1. **L'affirmation 1 est fausse.**

Développons : pour tout réel x ,

$$f(x) = (x+1)e^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}.$$

D'une part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. D'autre part, d'après le théorème des croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 + 0 = 0.$$

La limite de f en $+\infty$ vaut 0 (la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$), et non $+\infty$: l'affirmation est fausse.

Ce que le correcteur attend : le produit $(x+1)e^{-x}$ est une forme indéterminée « $+\infty \times 0$ » ; on ne peut pas conclure sans lever l'indétermination, et c'est le théorème des croissances comparées qui le permet — il doit être nommé.

2. L'affirmation 2 est vraie.

La fonction $g : x \mapsto xe^x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. En dérivant le produit uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$ (donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$) :

$$g'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x.$$

En dérivant une seconde fois, de la même manière :

$$g''(x) = 1 \times e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x.$$

Pour tout réel x , $e^x > 0$: le signe de $g''(x)$ est donc celui de $x+2$. Or, pour $x \in [-2; +\infty[$, on a $x \geq -2$, c'est-à-dire $x+2 \geq 0$, donc

$$g''(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in [-2; +\infty[.$$

D'après la caractérisation de la convexité par la dérivée seconde, la fonction g est convexe sur $[-2; +\infty[$: l'affirmation est vraie.

Remarque. Le point d'abscisse -2 est un point d'inflexion de la courbe de g : g'' s'y annule en changeant de signe. La fonction g est concave sur $] -\infty; -2]$.

3. L'affirmation 3 est fausse.

Écrivons la fonction à intégrer sous la forme d'un produit $u'v$ en posant

$$u'(x) = \sin x \implies u(x) = -\cos x, \quad v(x) = x \implies v'(x) = 1.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0; \pi]$ et leurs dérivées u' et v' y sont continues. D'après la formule d'intégration par parties $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$:

$$\int_0^\pi x \sin x dx = [-x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) \times 1 dx = [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx.$$

Or $[-x \cos x]_0^\pi = -\pi \cos(\pi) - (-0 \times \cos 0) = -\pi \times (-1) - 0 = \pi$, et $\int_0^\pi \cos x dx = [\sin x]_0^\pi = \sin(\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$. Finalement

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \pi + 0 = \pi \neq -\pi.$$

L'intégration par parties conduit donc à π , et non à $-\pi$: l'affirmation est fausse.

Ce que le correcteur attend : un contrôle de signe immédiat suffisait à rejeter $-\pi$. Sur $[0; \pi]$, on a $x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$, donc la fonction intégrée est positive : par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le bon ordre), $\int_0^\pi x \sin x dx \geq 0$, ce qui interdit la valeur $-\pi < 0$.

4. L'affirmation 4 est vraie.

L'équation $(E) : y' = 2y - 5$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 2 \neq 0$ et $b = -5$. D'après le cours, ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a} = Ce^{2x} + \frac{5}{2}, \quad C \in \mathbb{R},$$

et il existe une *unique* solution vérifiant une condition initiale donnée. Cherchons celle qui vaut 1 en 0 :

$$Ce^0 + \frac{5}{2} = 1 \iff C + \frac{5}{2} = 1 \iff C = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}.$$

L'unique solution de (E) valant 1 en 0 est donc $x \mapsto -\frac{3}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}$, c'est-à-dire exactement la fonction h : l'affirmation est vraie.

Vérification directe. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$h'(x) = -\frac{3}{2} \times 2e^{2x} = -3e^{2x},$$

tandis que

$$2h(x) - 5 = 2 \left(-\frac{3}{2}e^{2x} + \frac{5}{2} \right) - 5 = -3e^{2x} + 5 - 5 = -3e^{2x}.$$

On a bien $h'(x) = 2h(x) - 5$ pour tout réel x , donc h est solution de (E) ; et $h(0) = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Ce que le correcteur attend : l'affirmation dit « la solution », avec un article défini. Vérifier que h est *une* solution valant 1 en 0 ne suffit pas tout à fait : il faut invoquer l'unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée, ce que fait la résolution générale ci-dessus.

5. L'affirmation 5 est vraie.

La fonction `mystere` initialise `f` à 1 (ligne 2), puis multiplie successivement `f` par `k` pour `k` allant de 1 à `n` — la commande `range(1, n+1)` parcourt les entiers $1, 2, \dots, n$, la borne supérieure étant exclue — avant de renvoyer `f` (ligne 5). Elle calcule donc le produit $1 \times 2 \times \dots \times n$, c'est-à-dire la factorielle $n!$.

Déroulons l'exécution de `mystere(5)` :

valeur de <code>k</code>	(avant la boucle)	1	2	3	4
valeur de <code>f</code>	1	1	2	6	24

puis, au dernier passage, $k = 5$ donne $f = 24 \times 5 = 120$. La boucle s'arrête et la fonction renvoie

$$\text{mystere}(5) = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

L'affirmation est vraie.

Ce que le correcteur attend : le piège classique est de croire que `range(1, n+1)` s'arrête à $n - 1$. La borne *inférieure* est incluse, la borne *supérieure* est exclue : `range(1, 6)` parcourt bien 1, 2, 3, 4, 5.

Exercice 3

Sujet — Exercice 3 — 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(3x^2 + 1).$$

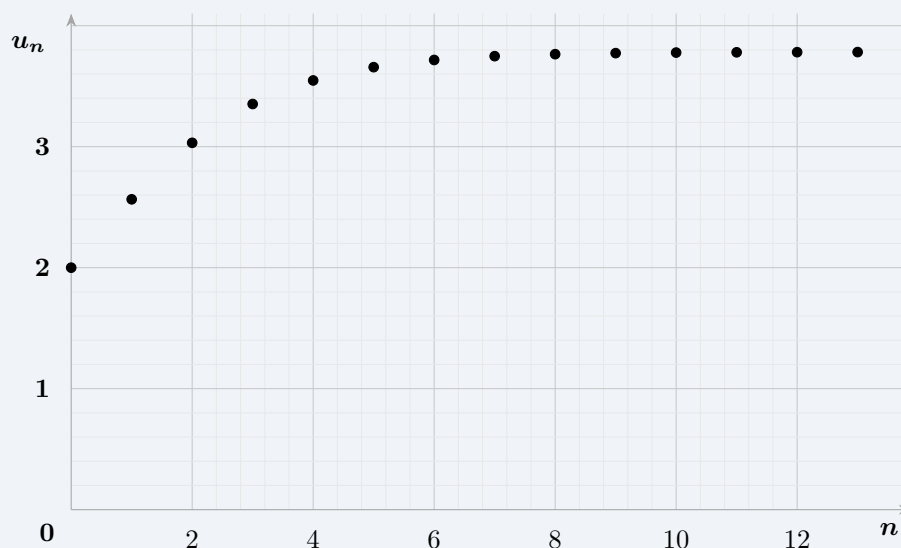
On admet que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Partie A On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier } n \geq 0 : \quad u_{n+1} = \ln(3u_n^2 + 1).$$

1. Calculer u_1 .

2. La suite (u_n) est représentée ci-dessous. Émettre des conjectures sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .



3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Partie B On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

Le but de cette partie est de trouver une valeur approchée de la limite ℓ .

On considère la fonction g définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x^2 + 1) - x.$$

1. On note g' la fonction dérivée de la fonction g . Démontrer que pour tout réel $x \in [0; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{-3x^2 + 6x - 1}{3x^2 + 1}.$$

2. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[2; 4]$.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2; 4]$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. Justifier que $\ell = \alpha$.

Corrigé

Partie A 1. On applique la relation de récurrence au rang $n = 0$, avec $u_0 = 2$:

$$u_1 = \ln(3u_0^2 + 1) = \ln(3 \times 2^2 + 1) = \ln(12 + 1) = \ln(13).$$

La valeur exacte est $u_1 = \ln 13$, soit $u_1 \approx 2,5649$, c'est-à-dire $u_1 \approx 2,56$ à 10^{-2} près.

2. Sur le graphique, les points $(n; u_n)$ montent régulièrement de $u_0 = 2$ jusqu'à un palier atteint vers $n = 7$ ou 8 , au-delà duquel ils paraissent tous alignés à la même hauteur, un peu en dessous de la graduation 4. On lit ce palier entre 3,7 et 3,8 (environ 3,8).

On conjecture donc que :

- la suite (u_n) est **croissante** ;
- la suite (u_n) est **convergente**, vers une limite ℓ voisine de 3,8 (en tout cas majorée par 4).

3. Démontrons par récurrence la propriété $P(n)$: « $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ ».

Initialisation. On a $u_0 = 2$ et $u_1 = \ln 13$. Comme $e^2 \approx 7,39 < 13$ et que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on a $\ln 13 > \ln(e^2) = 2$; par ailleurs $\ln 13 \approx 2,56 \leq 4$. Donc

$$2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4,$$

et $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel quelconque. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$. Ces quatre nombres appartiennent à $[0; +\infty[$, où la fonction f est croissante (résultat admis par l'énoncé) ; en appliquant f à cet encadrement, l'ordre est conservé :

$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4).$$

Or, par définition de la suite, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, tandis que

$$f(2) = \ln(3 \times 4 + 1) = \ln 13 \quad \text{et} \quad f(4) = \ln(3 \times 16 + 1) = \ln 49.$$

On obtient donc $\ln 13 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ln 49$. Il reste à comparer ces deux bornes à 2 et 4 :

- $\ln 13 \geq 2$, déjà établi à l'initialisation ;
- $e^4 \approx 54,6 > 49$, donc $\ln 49 < \ln(e^4) = 4$, toujours par stricte croissance de $\ln$.

Par transitivité,

$$2 \leq \ln 13 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ln 49 \leq 4,$$

c'est-à-dire $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$: la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété $P(0)$ est vraie et P est héréditaire : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

Ce que le correcteur attend : l'hérédité s'obtient en appliquant la *croissance* de f à l'encadrement supposé — c'est la seule information dont on dispose sur f , et elle est admise. Il faut aussi vérifier que les bornes obtenues, $\ln 13$ et $\ln 49$, referment bien l'encadrement dans $[2; 4]$: sans cela, l'hérédité n'est pas démontrée.

4. D'après la question 3, pour tout entier naturel n :

- $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est **croissante** ;
- $u_n \leq 4$: la suite (u_n) est **majorée** par 4.

D'après le théorème de convergence monotone, toute suite croissante et majorée est convergente : la suite (u_n) converge donc vers une limite réelle ℓ , et par passage à la limite dans l'encadrement $2 \leq u_n \leq 4$, on a $2 \leq \ell \leq 4$. Cela confirme la conjecture de la question 2.

Ce que le correcteur attend : le théorème de convergence monotone donne l'existence de la limite, mais **pas** sa valeur : 4 est un majorant, ce n'est pas la limite. C'est tout l'objet de la partie B.

Partie B 1. Posons $u(x) = 3x^2 + 1$. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $u(x) \geq 1 > 0$: la fonction $\ln \circ u$ est bien définie et dérivable, de dérivée $\frac{u'}{u}$ avec $u'(x) = 6x$. Donc, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 1} - 1.$$

En réduisant au même dénominateur $3x^2 + 1$:

$$g'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 1} - \frac{3x^2 + 1}{3x^2 + 1} = \frac{6x - 3x^2 - 1}{3x^2 + 1} = \frac{-3x^2 + 6x - 1}{3x^2 + 1}.$$

2. Pour tout réel x , $3x^2 + 1 > 0$: le signe de $g'(x)$ est celui de son numérateur $N(x) = -3x^2 + 6x - 1$. Factorisons partiellement :

$$N(x) = -3x(x - 2) - 1.$$

Soit $x \in [2; 4]$. Alors $x \geq 2 > 0$ et $x - 2 \geq 0$, donc $3x(x - 2) \geq 0$, d'où $-3x(x - 2) \leq 0$ et par conséquent

$$N(x) = -3x(x - 2) - 1 \leq -1 < 0.$$

Ainsi $g'(x) < 0$ pour tout x de $[2; 4]$: la fonction g est **strictement décroissante** sur $[2; 4]$.

3. Sur l'intervalle $[2; 4]$:

- g est dérivable donc *continue* ;
- g est *strictement décroissante* (question 2) ;
- $g(2) = \ln(3 \times 4 + 1) - 2 = \ln 13 - 2 \approx 0,565 > 0$ et $g(4) = \ln(3 \times 16 + 1) - 4 = \ln 49 - 4 \approx -0,108 < 0$, donc 0 est compris entre $g(4)$ et $g(2)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $g(x) = 0$ admet une **unique** solution α dans $[2; 4]$.

Valeur approchée. On encadre α par balayage à la calculatrice, en utilisant la stricte décroissance de g :

x	3,7	3,78	3,79	3,8
$g(x)$	$\approx 0,0393$	$\approx 0,0011$	$\approx -0,0037$	$\approx -0,0086$
signe	+	+	−	−

Comme $g(3,78) > 0 > g(3,79)$ et que g est strictement décroissante, on a

$$3,78 < \alpha < 3,79,$$

d'où

$$\alpha \approx 3,78 \quad (\text{à } 10^{-2} \text{ près}).$$

(Une valeur plus précise est $\alpha \approx 3,7823$.)

Ce que le correcteur attend : les trois hypothèses du corollaire — continuité, stricte monotonie, changement de signe — énoncées et vérifiées, et le théorème nommé. L'existence vient du théorème des valeurs intermédiaires, l'unicité de la stricte monotonie.

4. D'après la partie A, la suite (u_n) converge vers ℓ et vérifie $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout n ; par passage à la limite dans cet encadrement, $\ell \in [2; 4]$.

La fonction $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 1)$ est continue sur $[0; +\infty[$ (elle y est dérivable, d'après la partie B). Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \in [0; +\infty[$, la continuité de f en ℓ donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$, et la suite (u_{n+1}) a la même limite ℓ que la suite (u_n) . Par unicité de la limite d'une suite convergente :

$$\ell = f(\ell) = \ln(3\ell^2 + 1),$$

c'est-à-dire

$$\ln(3\ell^2 + 1) - \ell = 0, \quad \text{soit} \quad g(\ell) = 0.$$

Le réel ℓ est donc une solution de l'équation $g(x) = 0$ appartenant à $[2; 4]$. Or, d'après la question 3, cette équation admet une unique solution sur $[2; 4]$, à savoir α . Par conséquent

$$\ell = \alpha \approx 3,78,$$

ce qui confirme la lecture graphique de la partie A.

Ce que le correcteur attend : le passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est licite que parce que f est continue en ℓ ; et la conclusion $\ell = \alpha$ exige de savoir que ℓ appartient à l'intervalle $[2; 4]$ où l'unicité a été démontrée.

Exercice 4

Sujet — Exercice 4 — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les points $A(1; 2; -1)$, $B(0; 3; 2)$, $C(-2; 4; 0)$ et $D(8; 2; -11)$.

1.a. Démontrer que les points A , B et C définissent un plan.

1.b. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

1.c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $5x + 8y - z - 22 = 0$.

1.d. Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (ABC) .

2.a. On considère la droite Δ , orthogonale au plan (ABC) et passant par D . Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 2 + 8t \\ z = -11 - t \end{cases}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2.b. On appelle E le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC) . Démontrer que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{11}{2}; -2; -\frac{21}{2}\right)$.

2.c. En déduire la valeur exacte de la longueur DE , distance du point D au plan (ABC) .

3. On note H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (BC) est :

$$\begin{cases} x = -2k \\ y = 3 + k \\ z = 2 - 2k \end{cases}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats suivants :

Entrée 1:	$(-2/3-1)*(-2)+(10/3-2)*1+(4/3-(-1))*(-2)$
Sortie 1:	$\rightarrow 0$
Entrée 2:	$\text{RésoudreSystème}(-2*k=-2/3, 3+k=10/3, 2-2*k=4/3)$
Sortie 2:	$\rightarrow k=-1/3$
Entrée 3:	$\text{RacineCarrée}((-2/3-1)^2+(10/3-2)^2+(4/3+1)^2)$
Sortie 3:	$\rightarrow \text{RacineCarrée}(10)$
Entrée 4:	$\text{RacineCarrée}((-2-0))^2+(4-3)^2+(0-2)^2)$
Sortie 4:	$\rightarrow 3$

3.a. En utilisant les deux premiers résultats obtenus avec la feuille de calculs ci-dessus, justifier que le point H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .

3.b. En exploitant les autres résultats obtenus avec la feuille de calculs ci-dessus, déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.

Corrigé

1.a. Calculons les coordonnées de deux vecteurs, obtenues en soustrayant celles de l'origine du vecteur à celles de son extrémité :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-2 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -2-1 \\ 4-2 \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ? S'il existait un réel λ tel que $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$, la première coordonnée imposerait $-3 = -\lambda$, donc $\lambda = 3$; or la deuxième coordonnée donnerait alors $1 \times 3 = 3 \neq 2$. C'est impossible : les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Les points A , B et C ne sont donc pas alignés : ils définissent un unique plan, le plan (ABC) , dont $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont deux vecteurs directeurs.

1.b. Un vecteur non nul est normal à un plan lorsqu'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan. Le vecteur $\vec{n}$ est non nul, et le produit scalaire se calcule en repère orthonormé par la somme des produits des coordonnées :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 5 \times (-1) + 8 \times 1 + (-1) \times 3 = -5 + 8 - 3 = 0,$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 5 \times (-3) + 8 \times 2 + (-1) \times 1 = -15 + 16 - 1 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à $\vec{AB}$ et à $\vec{AC}$, deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC) (question 1.a) : $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

1.c. Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Avec $\vec{n}(5; 8; -1)$, le plan (ABC) a donc une équation de la forme

$$5x + 8y - z + d = 0.$$

Le point $A(1; 2; -1)$ appartient à ce plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$5 \times 1 + 8 \times 2 - (-1) + d = 0 \iff 5 + 16 + 1 + d = 0 \iff d = -22.$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc

$$5x + 8y - z - 22 = 0.$$

Contrôle avec les deux autres points : pour $B(0; 3; 2)$, $0 + 24 - 2 - 22 = 0$; pour $C(-2; 4; 0)$, $-10 + 32 - 0 - 22 = 0$. Les trois points conviennent.

1.d. Remplaçons x , y et z par les coordonnées de $D(8; 2; -11)$ dans le membre de gauche de l'équation :

$$5 \times 8 + 8 \times 2 - (-11) - 22 = 40 + 16 + 11 - 22 = 45 \neq 0.$$

Les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation du plan : le point D n'appartient pas au plan (ABC) . Les quatre points A , B , C et D ne sont donc pas coplanaires, et le tétraèdre $ABCD$ n'est pas aplati.

2.a. La droite Δ est orthogonale au plan (ABC) : elle est donc dirigée par un vecteur normal à ce plan, par exemple $\vec{n}(5; 8; -1)$. Elle passe par $D(8; 2; -11)$. Un point $M(x; y; z)$ appartient à Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\vec{DM} = t\vec{n}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x - 8 = 5t \\ y - 2 = 8t \\ z - (-11) = -t \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 2 + 8t \\ z = -11 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

C'est bien la représentation paramétrique proposée.

2.b. Le point E appartient à Δ : ses coordonnées sont de la forme $(8 + 5t; 2 + 8t; -11 - t)$ pour un certain réel t . Il appartient aussi au plan (ABC) : ses coordonnées vérifient donc l'équation $5x + 8y - z - 22 = 0$. En substituant :

$$5(8 + 5t) + 8(2 + 8t) - (-11 - t) - 22 = 0.$$

Développons :

$$40 + 25t + 16 + 64t + 11 + t - 22 = 0 \iff 90t + 45 = 0 \iff t = -\frac{45}{90} = -\frac{1}{2}.$$

En reportant $t = -\frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique :

$$x = 8 + 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}, \quad y = 2 + 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - 4 = -2,$$

$$z = -11 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -11 + \frac{1}{2} = -\frac{21}{2}.$$

Le point E a donc pour coordonnées $\left(\frac{11}{2}; -2; -\frac{21}{2}\right)$. (La droite Δ n'étant pas parallèle au plan, puisqu'elle lui est orthogonale, ce point d'intersection existe et est unique.)

2.c. Calculons les coordonnées du vecteur $\vec{DE}$:

$$\vec{DE} \begin{pmatrix} \frac{11}{2} - 8 \\ -2 - 2 \\ -\frac{21}{2} - (-11) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La longueur DE est la norme de ce vecteur :

$$DE = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + (-4)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 16 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25 + 64 + 1}{4}} = \sqrt{\frac{90}{4}} = \frac{\sqrt{90}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

La valeur exacte de la distance du point D au plan (ABC) est donc $DE = \frac{3\sqrt{10}}{2} \approx 4,74$.

Ce que le correcteur attend : DE est bien la *distance* de D au plan, car E est par construction le projeté orthogonal de D sur (ABC) (E est l'intersection du plan avec la droite passant par D et orthogonale à ce plan); c'est le point du plan le plus proche de D . On demandait la valeur *exacte* : $\frac{3\sqrt{10}}{2}$, et non 4,74.

3.a. La représentation paramétrique de (BC) montre que cette droite est dirigée par le vecteur $\vec{u}(-2; 1; -2)$ (ce sont les coefficients de k); on retrouve bien $\vec{BC}(-2 - 0; 4 - 3; 0 - 2) = (-2; 1; -2)$.

Le point H appartient à la droite (BC) . L'entrée 2 résout le système traduisant l'appartenance de $H\left(-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$ à (BC) : on cherche un réel k tel que $-2k = -\frac{2}{3}$, $3 + k = \frac{10}{3}$ et $2 - 2k = \frac{4}{3}$. Le logiciel renvoie une solution, donc ce système est compatible : il existe bien une valeur du paramètre donnant le point H , autrement dit $H \in (BC)$.

Le vecteur $\vec{AH}$ est orthogonal à la droite (BC) . On a

$$\vec{AH} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} - 1 \\ \frac{10}{3} - 2 \\ \frac{4}{3} - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix},$$

et l'entrée 1 calcule exactement le produit scalaire $\vec{AH} \cdot \vec{u}$:

$$\left(-\frac{2}{3} - 1\right) \times (-2) + \left(\frac{10}{3} - 2\right) \times 1 + \left(\frac{4}{3} - (-1)\right) \times (-2) = \frac{10}{3} + \frac{4}{3} - \frac{14}{3} = 0,$$

ce que confirme la sortie 1. Le vecteur $\vec{AH}$ est donc orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ de (BC) . Le point H appartient à (BC) et $\vec{AH}$ est orthogonal à (BC) : H est donc le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) . En particulier, AH est la distance de A à la droite (BC) .

Réserve sur la sortie 2. La valeur affichée par le logiciel, $k = -\frac{1}{3}$, ne vérifie pas les équations du système : la première donne $-2k = -\frac{2}{3}$, soit $k = \frac{1}{3}$, valeur qui satisfait aussi les deux autres ($3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ et $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$). Le signe imprimé est une coquille de l'énoncé ; elle est sans incidence sur la démonstration, qui n'utilise que l'existence d'une solution.

3.b. Prenons pour base du tétraèdre $ABCD$ le triangle ABC , contenu dans le plan (ABC) . *Aire de la base.* Dans le triangle ABC , la hauteur issue de A est le segment $[AH]$, puisque H est le projeté orthogonal de A sur (BC) (question 3.a). L'entrée 3 calcule la norme de $\vec{AH}$ et l'entrée 4 celle de $\vec{BC}$; les sorties donnent

$$AH = \sqrt{10} \quad \text{et} \quad BC = 3.$$

L'aire d'un triangle étant la moitié du produit d'un côté par la hauteur relative à ce côté :

$$\mathcal{B} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{3 \times \sqrt{10}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Hauteur relative à cette base. C'est la distance du sommet D au plan de la base, c'est-à-dire au plan (ABC) : d'après la question 2.c,

$$h = DE = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Volume. En appliquant la formule rappelée :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 10}{4} = \frac{90}{12} = \frac{15}{2}.$$

Le volume du tétraèdre $ABCD$ vaut donc $\frac{15}{2} = 7,5$ unités de volume.

Ce que le correcteur attend : distinguer les deux « hauteurs » en jeu — AH est la hauteur du triangle ABC (elle sert à calculer l'aire de la base), tandis que DE est la hauteur du tétraèdre relative à cette base (distance de D au plan (ABC)). Confondre les deux fait perdre tout le bénéfice des questions précédentes. Le résultat s'exprime en unités de volume, le repère étant orthonormé.