

Mathématiques

Baccalauréat général 2026 — épreuve de spécialité

Polynésie, session 2026 (26-MATJ2PO1)

Corrigé

Quatre exercices

Exercice 1

Sujet — Exercice 1 — 5 points

Dans cet exercice, on s'intéresse à la part des filles et des garçons s'orientant vers des études scientifiques après avoir suivi un enseignement de spécialité mathématiques en terminale.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A Dans une académie donnée, la population est constituée d'élèves de terminale ayant choisi la spécialité mathématiques. On souhaite analyser leurs choix d'orientation, notamment vers les études supérieures en ingénierie.

Les répartitions sont les suivantes :

- 40 % sont des filles ; 60 % sont des garçons ;
- parmi les filles, 33,75 % envisagent des études d'ingénieur ;
- parmi les garçons, 54,25 % envisagent des études d'ingénieur.

On interroge uniformément au hasard un élève de terminale ayant choisi la spécialité mathématiques de cette académie et on considère les événements suivants :

- F : « L'élève est une fille » ;
- I : « L'élève envisage des études d'ingénieur ».

Pour un événement E quelconque, on note $\bar{E}$ l'événement contraire et $P(E)$ la probabilité de E .

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que l'élève choisi au hasard soit une fille envisageant des études d'ingénieur.
3. Démontrer que la probabilité que l'élève choisi au hasard envisage des études d'ingénieur est égale à 0,4605.
4. L'élève interrogé envisage des études d'ingénieur. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une fille ? Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

Partie B Dans cette partie, on considère un entier naturel n non nul.

On interroge uniformément au hasard dans cette académie n filles en terminale, qu'elles suivent ou non la spécialité mathématiques. On suppose que ce nombre de filles est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à des tirages indépendants avec remise.

On note X la variable aléatoire qui modélise le nombre de filles envisageant de devenir ingénieure, qu'elle suive ou non la spécialité mathématiques.

On admet que la probabilité qu'une fille souhaite devenir ingénieure est égale à 0,15.

- 1.a. Justifier que X suit une loi binomiale.
- 1.b. Exprimer en fonction de n l'espérance de X .
2. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit nombre de lycéennes qu'il faut interroger pour que la probabilité de l'événement « Au moins une fille parmi celles interrogées souhaite devenir ingénieure » soit supérieure ou égale à 0,99.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de $n = 29$ filles. Déterminer la probabilité qu'au moins le quart des filles interrogées souhaite devenir ingénieure. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

Partie C On s'intéresse à dix académies françaises de tailles comparables numérotées de 1 à 10.

On considère X_1 la variable aléatoire qui, à un échantillon de 1 500 lycéennes de l'académie n° 1, associe le nombre de filles envisageant de devenir ingénieure. On définit de la même façon les variables aléatoires $X_2, \dots, X_{10}$ pour les académies 2 à 10.

On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ sont indépendantes entre elles et qu'elles admettent la même espérance égale à 225 et la même variance égale à 191,25.

On considère la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$.

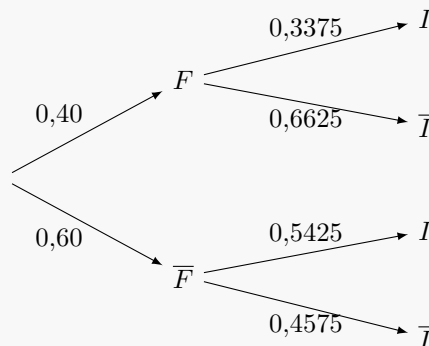
1. Que représente la variable aléatoire S pour les 15 000 lycéennes interrogées sur l'ensemble des dix académies ?

2. Calculer l'espérance et la variance de S .

3. On considère l'ensemble des 15 000 lycéennes formé par les échantillons issus des dix académies. Argumenter pour dire si l'affirmation suivante est vraie, fausse ou si on ne peut pas savoir : « La probabilité que le nombre total de filles envisageant de devenir ingénieure soit strictement compris entre 2 000 et 2 500 est supérieure à 0,95 ».

Corrigé

Partie A **1.** Les données se traduisent ainsi : $P(F) = 0,40$ et $P(\bar{F}) = 0,60$; « parmi les filles, 33,75 % » est une probabilité conditionnelle, $P_F(I) = 0,3375$; de même $P_{\bar{F}}(I) = 0,5425$. On en déduit $P_F(\bar{I}) = 1 - 0,3375 = 0,6625$ et $P_{\bar{F}}(\bar{I}) = 1 - 0,5425 = 0,4575$. D'où l'arbre pondéré :



2. L'événement demandé est $F \cap I$. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches :

$$P(F \cap I) = P(F) \times P_F(I) = 0,40 \times 0,3375 = 0,135.$$

La probabilité que l'élève choisi soit une fille envisageant des études d'ingénieur est 0,135.

3. Les événements F et $\bar{F}$ sont de probabilités non nulles et forment une partition de l'univers : c'est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(I) = P(F \cap I) + P(\bar{F} \cap I) = P(F) P_F(I) + P(\bar{F}) P_{\bar{F}}(I).$$

Numériquement :

$$P(I) = 0,40 \times 0,3375 + 0,60 \times 0,5425 = 0,135 + 0,3255 = 0,4605.$$

La probabilité que l'élève envisage des études d'ingénieur est bien égale à 0,4605.

4. On demande la probabilité que l'élève soit une fille *sachant* qu'il envisage des études d'ingénieur, c'est-à-dire $P_I(F)$ (et non $P_F(I)$: le conditionnement est renversé). Comme $P(I) = 0,4605 \neq 0$, par définition de la probabilité conditionnelle :

$$P_I(F) = \frac{P(F \cap I)}{P(I)} = \frac{0,135}{0,4605} = \frac{1350}{4605} = \frac{90}{307} \approx 0,293.$$

Sachant que l'élève envisage des études d'ingénieur, la probabilité que ce soit une fille est environ 0,293 (valeur exacte $\frac{90}{307} = 0,29315\dots$).

Ce que le correcteur attend : $P_I(F) \approx 0,293 < 0,40 = P(F)$: les filles sont sous-représentées parmi les candidats à l'ingénierie, ce qui est cohérent avec les taux donnés.

Partie B 1.a. On répète n fois, de façon identique et indépendante (le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise), la même épreuve de Bernoulli : interroger une lycéenne, le succès étant « elle souhaite devenir ingénieure », de probabilité $p = 0,15$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli : X suit donc la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,15$, notée $\mathcal{B}(n; 0,15)$.

1.b. Pour une loi binomiale de paramètres n et p , l'espérance vaut np , donc

$$E(X) = 0,15n.$$

2. Notons A l'événement « au moins une fille interrogée souhaite devenir ingénieure », soit $A = (X \geq 1)$. Son contraire est $(X = 0)$ et

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} 0,15^0 (1 - 0,15)^n = 0,85^n, \quad \text{donc} \quad P(X \geq 1) = 1 - 0,85^n.$$

Réolvons l'inéquation :

$$1 - 0,85^n \geq 0,99 \iff 0,85^n \leq 0,01 \iff \ln(0,85^n) \leq \ln(0,01) \iff n \ln(0,85) \leq \ln(0,01),$$

la fonction $\ln$ étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Comme $0 < 0,85 < 1$, on a $\ln(0,85) < 0$: en divisant par $\ln(0,85)$, le sens de l'inégalité change :

$$n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,85)} \approx 28,34.$$

Le plus petit entier convenable est $n = 29$. On le vérifie : $0,85^{28} \approx 0,0106 > 0,01$ et $0,85^{29} \approx 0,0090 < 0,01$. Il faut donc interroger au moins 29 lycéennes.

Ce que le correcteur attend : le passage par l'événement contraire, et surtout le changement de sens de l'inégalité lors de la division par $\ln(0,85) < 0$.

3. Ici X suit la loi $\mathcal{B}(29; 0,15)$. Le quart de l'effectif vaut $\frac{29}{4} = 7,25$, qui n'est pas entier : « au moins le quart des filles », c'est $X \geq 7,25$, donc, X ne prenant que des valeurs entières, $X \geq 8$. Par passage au contraire :

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 1 - 0,9414 = 0,0586,$$

la valeur $P(X \leq 7) \approx 0,941417$ étant obtenue à la calculatrice. Arrondie à 10^{-3} près, la probabilité cherchée vaut 0,059.

Ce que le correcteur attend : ne pas écrire $P(X \geq 7)$ ($\approx 0,133$) : 7,25 n'étant pas entier, le premier entier supérieur ou égal à 7,25 est 8.

Partie C 1. Chaque X_i compte, dans l'échantillon de 1 500 lycéennes de l'académie n° i , celles qui envisagent de devenir ingénieure. Leur somme $S = X_1 + \dots + X_{10}$ représente donc le nombre total de lycéennes envisageant de devenir ingénieure parmi les $10 \times 1\,500 = 15\,000$ lycéennes interrogées sur l'ensemble des dix académies.

2. Par linéarité de l'espérance (valable sans hypothèse d'indépendance) :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10}) = 10 \times 225 = 2\,250.$$

Les variables $X_1, \dots, X_{10}$ étant *indépendantes*, la variance est additive :

$$V(S) = V(X_1) + \dots + V(X_{10}) = 10 \times 191,25 = 1\,912,5,$$

d'où un écart type $\sigma(S) = \sqrt{1\,912,5} \approx 43,7$.

Ce que le correcteur attend : l'indépendance ne sert pas pour l'espérance, mais elle est indispensable pour additionner les variances ; il faut le dire.

3. L'affirmation est **vraie**. En effet, l'encadrement strict $2\,000 < S < 2\,500$ est centré sur $E(S) = 2\,250$:

$$2\,000 < S < 2\,500 \iff -250 < S - 2\,250 < 250 \iff |S - E(S)| < 250.$$

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S , qui admet une espérance et une variance, avec $\varepsilon = 250 > 0$:

$$P(|S - E(S)| \geq 250) \leq \frac{V(S)}{250^2} = \frac{1\,912,5}{62\,500} = 0,0306.$$

En passant à l'événement contraire :

$$P(2\,000 < S < 2\,500) = 1 - P(|S - E(S)| \geq 250) \geq 1 - 0,0306 = 0,9694.$$

Or $0,9694 > 0,95$: la probabilité que le nombre total de filles envisageant de devenir ingénieure soit strictement compris entre 2 000 et 2 500 est effectivement supérieure à 0,95. L'affirmation est vraie.

Ce que le correcteur attend : Bienaymé-Tchebychev *major*e la probabilité des queues ; c'est en passant au contraire qu'on obtient une *minoration* de la probabilité centrale, seule capable de prouver « supérieure à 0,95 ». La loi de S n'est pas connue, mais l'inégalité n'en a pas besoin : on peut donc conclure, et non répondre « on ne peut pas savoir ».

Exercice 2

Sujet — Exercice 2 — 5 points

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

Partie A On considère la fonction f définie pour tout $x \in [4; 10]$ par $f(x) = \ln(8x^3 - 1)$. On admet que la fonction f est dérivable sur $[4; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout $x \in [4; 10]$, on a :

$$f'(x) = \frac{24x^2}{(2x-1)(4x^2+2x+1)}.$$

2.a. En déduire que f est croissante sur $[4; 10]$.

2.b. Montrer que, pour tout $x \in [4; 10]$, on a : $4 \leq f(x) \leq 10$.

3. On définit la fonction g définie pour tout $x \in [4; 10]$ par $g(x) = f(x) - x$. On admet que g est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

3.a. Montrer que, sur l'intervalle $[4; 10]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

3.b. Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de α .

Partie B On admet qu'on peut définir la suite (u_n) par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction étudiée à la partie A.

1. Donner une valeur approchée de u_1 à 10^{-1} près.

2.a. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10.$$

2.b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. Montrer que la suite (u_n) converge vers le nombre α , défini dans la partie A.

Partie C Dans cette partie, on admet que $8,4 \leq \alpha \leq 8,5$.

On a créé, en langage Python, la fonction `alpha` suivante. On précise qu'en langage Python, l'instruction `log` correspond à `ln`.

```
1 def f(x):
2     return log(8*x**3 - 1)
3
4 def alpha(a):
5     n = 0
6     u = 5
7     while u < a:
8         u = f(u)
9         n = n + 1
10    return n
```

1. On admet que `alpha(8.499)` renvoie la valeur 11. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Un utilisateur exécute `alpha(8.6)`. Expliquer pourquoi aucune valeur n'est alors renvoyée.

Corrigé

Partie A 1. Posons $u(x) = 8x^3 - 1$. Pour $x \in [4; 10]$, la fonction $x \mapsto 8x^3$ est croissante donc $u(x) \geq 8 \times 4^3 - 1 = 511 > 0$: la composée $f = \ln \circ u$ est bien définie. D'après la formule de dérivation $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$, avec $u'(x) = 24x^2$:

$$f'(x) = \frac{24x^2}{8x^3 - 1}.$$

Il reste à factoriser le dénominateur. En reconnaissant la différence de cubes $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ avec $a = 2x$ et $b = 1$:

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = 8x^3 + 4x^2 + 2x - 4x^2 - 2x - 1 = 8x^3 - 1.$$

Par conséquent, pour tout $x \in [4; 10]$:

$$f'(x) = \frac{24x^2}{(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)}.$$

2.a. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $[4; 10]$: le numérateur $24x^2$ est strictement positif (car $x \geq 4 > 0$) ; $2x - 1 \geq 2 \times 4 - 1 = 7 > 0$; enfin $4x^2 + 2x + 1 > 0$ comme somme de trois termes strictement positifs pour $x > 0$. Le quotient de deux quantités strictement positives est strictement positif : $f'(x) > 0$ sur $[4; 10]$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[4; 10]$.

2.b. Puisque f est croissante sur $[4; 10]$, pour tout x de cet intervalle :

$$f(4) \leq f(x) \leq f(10), \quad \text{avec} \quad f(4) = \ln(511) \approx 6,236 \quad \text{et} \quad f(10) = \ln(7999) \approx 8,987.$$

Il suffit alors d'encadrer ces deux valeurs sans calculatrice. La fonction $\ln$ étant strictement croissante : $511 > e^4 \approx 54,6$ donc $\ln(511) > 4$; et $7999 < e^{10} \approx 22\,026$ donc $\ln(7999) < 10$. On en déduit

$$4 < \ln(511) \leq f(x) \leq \ln(7999) < 10,$$

et donc $4 \leq f(x) \leq 10$ pour tout $x \in [4; 10]$.

Ce que le correcteur attend : cette question dit que l'intervalle $[4; 10]$ est *stable* par f , autrement dit $f([4; 10]) \subset [4; 10]$: c'est exactement ce qui permettra, en partie B, de définir la suite (u_n) et de mener la récurrence.

3.a. La fonction $g = f - \text{Id}$ est dérivable sur $[4; 10]$ comme différence de fonctions dérivables, donc continue sur $[4; 10]$; l'énoncé admet qu'elle y est strictement décroissante. Ses valeurs aux bornes sont

$$g(4) = \ln(511) - 4 \approx 2,236 > 0 \quad \text{et} \quad g(10) = \ln(7999) - 10 \approx -1,013 < 0.$$

Le réel 0 est donc compris entre $g(10)$ et $g(4)$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), appliqué à la fonction g continue et strictement décroissante sur $[4; 10]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une **unique** solution α dans $[4; 10]$.

3.b. La fonction g étant strictement décroissante, $g(x) > 0$ pour $x < \alpha$ et $g(x) < 0$ pour $x > \alpha$.
À la calculatrice :

$$f(8,499) \approx 8,49908 > 8,499 \quad \text{donc} \quad g(8,499) \approx 8,3 \times 10^{-5} > 0,$$

$$f(8,5) \approx 8,49944 < 8,5 \quad \text{donc} \quad g(8,5) \approx -5,6 \times 10^{-4} < 0.$$

Le changement de signe de g se produit donc entre 8,499 et 8,5 :

$$8,499 < \alpha < 8,500,$$

encadrement d'amplitude 10^{-3} (on a en fait $\alpha \approx 8,4991$).

Partie B 1. Par définition, $u_1 = f(u_0) = f(5) = \ln(8 \times 5^3 - 1) = \ln(999) \approx 6,9068$. Ainsi $u_1 \approx 6,9$ à 10^{-1} près.

2.a. Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ ». Démontrons-la par récurrence.

Initialisation. On a $u_0 = 5$ et $u_1 = \ln(999) \approx 6,91$, donc $4 \leq 5 \leq 6,91 \leq 10$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier naturel n fixé, c'est-à-dire $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$. Les réels u_n et u_{n+1} appartiennent alors à $[4; 10]$, où f est croissante (question **2.a** de la partie A) ; en appliquant f à l'encadrement $u_n \leq u_{n+1}$, on obtient

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}), \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

Par ailleurs, $u_n \in [4; 10]$ donne $4 \leq f(u_n) = u_{n+1}$ et $u_{n+1} \in [4; 10]$ donne $f(u_{n+1}) = u_{n+2} \leq 10$, d'après la question **2.b** de la partie A. En rassemblant :

$$4 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10,$$

c'est-à-dire $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

2.b. L'encadrement précédent donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante. Il donne aussi $u_n \leq 10$: elle est majorée par 10. D'après le théorème de convergence monotone, toute suite croissante et majorée est convergente : la suite (u_n) converge vers un réel ℓ .

3. Notons ℓ la limite de (u_n) . Pour tout n , $4 \leq u_n \leq 10$; par passage à la limite dans cette inégalité large, $4 \leq \ell \leq 10$, donc $\ell \in [4; 10]$.

La fonction f est dérivable, donc continue, sur $[4; 10]$, en particulier en ℓ . D'après le théorème sur l'image d'une suite convergente, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ pour tout n , et la suite (u_{n+1}) est la suite (u_n) décalée d'un rang : elle converge donc aussi vers ℓ . Par unicité de la limite :

$$\ell = f(\ell), \quad \text{c'est-à-dire} \quad g(\ell) = f(\ell) - \ell = 0.$$

Ainsi ℓ est une solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $[4; 10]$. Or cette équation y admet une unique solution, à savoir α (partie A, question **3.a**) : donc $\ell = \alpha$. La suite (u_n) converge vers α .
Ce que le correcteur attend : l'argument du point fixe n'est valable qu'après avoir prouvé que la limite existe (question **2.b**) et qu'elle appartient à l'intervalle où f est continue ; c'est l'unicité de la solution de $g(x) = 0$ qui identifie enfin $\ell = \alpha$.

Partie C 1. Dans la fonction **alpha**, la variable **u** contient successivement $u_0 = 5$, puis $u_1, u_2, \dots$, la variable **n** comptant le nombre de fois où la relation $u \mapsto f(u)$ a été appliquée : après n passages dans la boucle, **u** contient u_n . La boucle « tant que **u** < **a** » s'arrête dès que le terme courant atteint ou dépasse a , et la fonction renvoie alors le rang correspondant.

Ainsi `alpha(8.499) = 11` signifie que 11 est le plus petit entier n tel que $u_n \geq 8,499$: la suite (u_n) , croissante, franchit le seuil 8,499 pour la première fois au rang 11 (on a $u_{10} \approx 8,49897 < 8,499$ et $u_{11} \approx 8,49907 \geq 8,499$). Autrement dit, il faut 11 itérations, en partant de $u_0 = 5$, pour que la suite atteigne le seuil 8,499.

2. La suite (u_n) est croissante et converge vers α : elle est donc majorée par sa limite, c'est-à-dire que $u_n \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, s'il existait un rang N avec $u_N > \alpha$, la croissance donnerait $u_n \geq u_N$ pour tout $n \geq N$, donc $\alpha = \lim u_n \geq u_N > \alpha$, ce qui est absurde. Or l'énoncé admet $\alpha \leq 8,5$. Par conséquent, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq \alpha \leq 8,5 < 8,6.$$

La condition `u < a` de la ligne 7, avec $a = 8,6$, est donc vraie à chaque passage : la boucle `while` ne s'arrête jamais, l'instruction `return n` de la ligne 10 n'est jamais atteinte et le programme ne renvoie aucune valeur (il tourne indéfiniment).

Ce que le correcteur attend : il ne suffit pas de dire « la suite converge » ; il faut constater que sa limite α est *strictement inférieure* au seuil 8,6 et que tous les termes restent en dessous de α , ce qui rend la condition d'arrêt inaccessible.

Exercice 3

Sujet — Exercice 3 — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(-1; 1; 1), \quad B(1; -6; -1) \quad \text{et} \quad C(-5; 2; 3).$$

1.a. Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

1.b. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .

1.c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$6x - 2y + 13z - 5 = 0.$$

2. On considère le plan (P) d'équation cartésienne $8x - 2y - 4z + 18 = 0$.

On admet que deux plans sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.

Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.

3. Soit (d) une droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 + t \\ y = -11 + 6t \\ z = 2 - t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que la droite (d) intersecte le plan (ABC) en un unique point qu'on nommera E , et qui a pour coordonnées $E(-3; -5; 1)$.

4. Soit $H(-2; 1; 0)$.

4.a. Montrer que H est le projeté orthogonal de A sur (d) .

4.b. En déduire la distance du point A à la droite (d) .

4.c. Montrer que le triangle AHE est rectangle et que son aire est égale à $\sqrt{19}$ unités d'aire.

Corrigé

1.a. Trois points sont alignés si et seulement si deux des vecteurs qu'ils définissent sont colinéaires. Calculons les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$:

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ -6 - 1 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -5 - (-1) \\ 2 - 1 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

S'il existait un réel λ tel que $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$, la première coordonnée donnerait $-4 = 2\lambda$, soit $\lambda = -2$; mais la deuxième coordonnée donnerait alors $1 = -2 \times (-7) = 14$, ce qui est faux.

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont donc pas colinéaires : les points A , B et C ne sont pas alignés (et définissent bien un plan (ABC)).

1.b. Un vecteur non nul est normal à un plan lorsqu'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan. Le vecteur $\vec{n}(6; -2; 13)$ est non nul, et $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ sont deux vecteurs directeurs non colinéaires de (ABC) d'après la question précédente. Le repère étant orthonormal, on calcule les produits scalaires avec l'expression analytique :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 6 \times 2 + (-2) \times (-7) + 13 \times (-2) = 12 + 14 - 26 = 0,$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 6 \times (-4) + (-2) \times 1 + 13 \times 2 = -24 - 2 + 26 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{AB}$ et à $\vec{AC}$: c'est un vecteur normal au plan (ABC) .

1.c. Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Ici $\vec{n}(6; -2; 13)$, donc (ABC) a une équation de la forme $6x - 2y + 13z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$. Le point $A(-1; 1; 1)$ appartient au plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$6 \times (-1) - 2 \times 1 + 13 \times 1 + d = 0 \iff -6 - 2 + 13 + d = 0 \iff 5 + d = 0 \iff d = -5.$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $6x - 2y + 13z - 5 = 0$.

Vérification : pour $B(1; -6; -1)$, $6 + 12 - 13 - 5 = 0$; pour $C(-5; 2; 3)$, $-30 - 4 + 39 - 5 = 0$. Les trois points vérifient bien cette équation.

2. L'équation cartésienne $8x - 2y - 4z + 18 = 0$ du plan (P) fournit directement un vecteur normal à (P) : $\vec{n}'(8; -2; -4)$. Calculons le produit scalaire des deux vecteurs normaux :

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 6 \times 8 + (-2) \times (-2) + 13 \times (-4) = 48 + 4 - 52 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, tous deux non nuls, sont donc orthogonaux : d'après le critère admis dans l'énoncé, les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.

3. La représentation paramétrique de (d) montre qu'elle est dirigée par le vecteur $\vec{u}(1; 6; -1)$. Commençons par comparer $\vec{u}$ au vecteur normal $\vec{n}$ de (ABC) :

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 6 \times 1 + (-2) \times 6 + 13 \times (-1) = 6 - 12 - 13 = -19 \neq 0.$$

Le vecteur directeur de (d) n'est pas orthogonal au vecteur normal de (ABC) : la droite (d) n'est donc pas parallèle au plan (ABC) , et elle le coupe en un unique point.

Déterminons-le : un point de (d) de paramètre t appartient à (ABC) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$6(-4 + t) - 2(-11 + 6t) + 13(2 - t) - 5 = 0.$$

On développe :

$$-24 + 6t + 22 - 12t + 26 - 13t - 5 = 0 \iff 19 - 19t = 0 \iff t = 1.$$

Cette équation du premier degré admet une unique solution, ce qui confirme l'unicité du point d'intersection. En reportant $t = 1$ dans la représentation paramétrique :

$$x = -4 + 1 = -3, \quad y = -11 + 6 = -5, \quad z = 2 - 1 = 1.$$

La droite (d) coupe donc le plan (ABC) au seul point $E(-3; -5; 1)$.

4.a. Le projeté orthogonal de A sur la droite (d) est l'unique point H de (d) tel que $\vec{AH}$ soit orthogonal à (d) . Il y a donc deux choses à vérifier.

H appartient à (d) . On cherche t tel que $-4 + t = -2$, soit $t = 2$; pour cette valeur, $y = -11 + 6 \times 2 = 1$ et $z = 2 - 2 = 0$. Les trois coordonnées de $H(-2; 1; 0)$ sont obtenues pour le même paramètre $t = 2$: $H \in (d)$.

(AH) est orthogonale à (d) . On a

$$\vec{AH} \begin{pmatrix} -2 - (-1) \\ 1 - 1 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AH} \cdot \vec{u} = (-1) \times 1 + 0 \times 6 + (-1) \times (-1) = -1 + 0 + 1 = 0.$$

Le vecteur $\vec{AH}$ est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ de (d) . Le point H appartient à (d) et $\vec{AH} \perp \vec{u}$: H est bien le projeté orthogonal de A sur (d) .

4.b. La distance d'un point à une droite est la distance de ce point à son projeté orthogonal sur cette droite (c'est la plus courte distance de A aux points de (d)). Ici :

$$AH = \|\vec{AH}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

La distance du point A à la droite (d) vaut donc $\sqrt{2}$ (soit environ 1,41).

4.c. Les points H et E appartiennent tous deux à (d) (questions **3.** et **4.a**), et ils sont distincts. Le vecteur $\vec{HE}$ est donc un vecteur directeur de (d) :

$$\vec{HE} \begin{pmatrix} -3 - (-2) \\ -5 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{on retrouve } \vec{HE} = -\vec{u}).$$

Calculons le produit scalaire :

$$\vec{HA} \cdot \vec{HE} = 1 \times (-1) + 0 \times (-6) + 1 \times 1 = -1 + 0 + 1 = 0, \quad \text{avec } \vec{HA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\vec{HA}$ et $\vec{HE}$ sont orthogonaux : le triangle AHE est rectangle en H . C'était prévisible, puisque $\vec{AH}$ est orthogonal à la droite (d) , qui porte le côté $[HE]$.

Les côtés de l'angle droit ont pour longueurs

$$HA = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad HE = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 36 + 1} = \sqrt{38}.$$

Dans un triangle rectangle, l'aire est la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit :

$$\mathcal{A}_{AHE} = \frac{HA \times HE}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{38}}{2} = \frac{\sqrt{76}}{2} = \frac{\sqrt{4 \times 19}}{2} = \frac{2\sqrt{19}}{2} = \sqrt{19}.$$

L'aire du triangle AHE est donc égale à $\sqrt{19}$ unités d'aire (soit environ 4,36).

Ce que le correcteur attend : la hauteur issue de A dans le triangle AHE est précisément $[AH]$, car H est le projeté orthogonal de A sur $(HE) = (d)$: c'est ce qui justifie d'utiliser HA et HE comme base et hauteur, sans recalculer AE .

Exercise 4

Sujet — Exercice 4 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{(x^2)}$.

Affirmation 1 : f est concave sur $]-\infty; 0]$.

2. Un refuge spécialisé accueille 24 rapaces numérotés de 1 à 24. Le refuge travaille avec trois vétérinaires. Afin d'administrer un soin à tous les oiseaux, le directeur veut donc former trois groupes, numérotés de 1 à 3, constitués chacun de 8 rapaces.

Affirmation 2 : Le nombre de façons de répartir les rapaces dans les groupes 1 à 3 est :

$$\frac{24!}{(8!)^3}.$$

3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle : $y' = -y + 1$ sur $\mathbb{R}$.

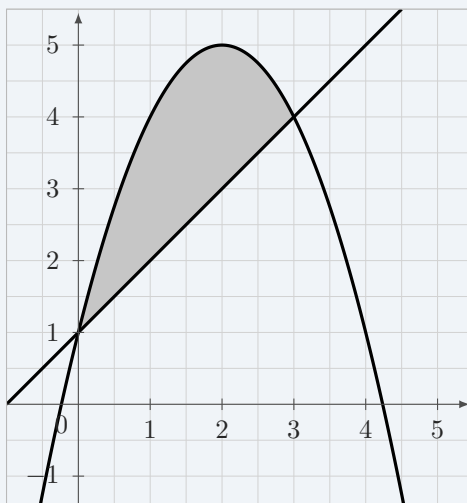
Affirmation 3 : La fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - 1$ vérifie $g' = -g$.

4. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n}.$$

Affirmation 4 : La suite (u_n) n'admet pas de limite.

5. On a tracé ci-dessous la parabole d'équation $y = -x^2 + 4x + 1$ et la droite d'équation $y = x + 1$.



Affirmation 5 : L'aire du domaine grisé est égale à 6,5 unités d'aire.

Corrigé

1. Affirmation 1 : VRAIE.

La concavité d'une fonction deux fois dérivable se lit sur le signe de sa dérivée seconde : f est concave sur un intervalle I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

La fonction $f : x \mapsto x e^{(x^2)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de $x \mapsto x$ et de la composée $x \mapsto e^{(x^2)}$, dont la dérivée est $2x e^{(x^2)}$ d'après $(e^v)' = v' e^v$. Avec $(uv)' = u'v + uv'$:

$$f'(x) = 1 \times e^{(x^2)} + x \times 2x e^{(x^2)} = (1 + 2x^2) e^{(x^2)}.$$

En dérivant une seconde fois, toujours par la formule du produit :

$$f''(x) = 4x e^{(x^2)} + (1 + 2x^2) \times 2x e^{(x^2)} = (4x + 2x + 4x^3) e^{(x^2)} = 2x(2x^2 + 3) e^{(x^2)}.$$

Étudions le signe de $f''(x)$ sur $]-\infty; 0]$: l'exponentielle $e^{(x^2)}$ est strictement positive, $2x^2 + 3 \geq 3 > 0$, et $2x \leq 0$ puisque $x \leq 0$. Le produit est donc négatif ou nul : $f''(x) \leq 0$ sur $]-\infty; 0]$. La fonction f est bien concave sur cet intervalle.

2. Affirmation 2 : VRAIE.

Les rapaces sont numérotés (donc discernables) et les trois groupes sont eux aussi numérotés : répartir les oiseaux, c'est choisir successivement le contenu du groupe 1, puis celui du groupe 2, puis celui du groupe 3. L'ordre à l'intérieur d'un groupe n'intervient pas : il s'agit de *combinaisons*.

- Groupe 1 : on choisit 8 rapaces parmi les 24, soit $\binom{24}{8}$ possibilités ;
- groupe 2 : on choisit 8 rapaces parmi les 16 restants, soit $\binom{16}{8}$;
- groupe 3 : les 8 derniers rapaces, soit $\binom{8}{8} = 1$ possibilité.

D'après le principe multiplicatif, le nombre de répartitions est

$$\binom{24}{8} \binom{16}{8} \binom{8}{8} = \frac{24!}{8! \times 16!} \times \frac{16!}{8! \times 8!} \times 1 = \frac{24!}{8! \times 8! \times 8!} = \frac{24!}{(8!)^3}.$$

C'est exactement la formule proposée.

Ce que le correcteur attend : le fait que les groupes soient *numérotés* est essentiel. S'ils étaient indiscernables (trois paquets posés sur une table), il faudrait encore diviser par $3!$, nombre de façons de leur attribuer les numéros, et le résultat serait $\frac{24!}{3! (8!)^3}$.

3. Affirmation 3 : VRAIE.

Dire que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -y + 1$ signifie que, pour tout réel x , $f'(x) = -f(x) + 1$.

La fonction $g : x \mapsto f(x) - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de f et d'une fonction constante, et $g'(x) = f'(x)$ (la dérivée d'une constante est nulle). Donc, pour tout réel x :

$$g'(x) = f'(x) = -f(x) + 1 = -(f(x) - 1) = -g(x).$$

La fonction g vérifie donc bien $g' = -g$ sur $\mathbb{R}$.

Ce que le correcteur attend : c'est la méthode générale de résolution de $y' = ay + b$: on retranche la solution constante ($y = 1$ ici, car $-1 + 1 = 0$) pour se ramener à l'équation homogène $g' = -g$, dont les solutions sont $g(x) = C e^{-x}$. On en déduit $f(x) = C e^{-x} + 1$ avec $C \in \mathbb{R}$.

4. Affirmation 4 : FAUSSE.

Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction sinus est bornée : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$. En divisant par $n > 0$, qui ne change pas le sens des inégalités :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad -\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$. La suite (u_n) est encadrée par deux suites convergeant vers la même limite 0 : d'après le théorème des gendarmes (théorème d'encadrement),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

La suite (u_n) admet donc une limite, à savoir 0 : l'affirmation est fausse.

Ce que le correcteur attend : $\sin(n)$ n'a effectivement pas de limite quand $n \rightarrow +\infty$, mais le facteur $\frac{1}{n}$ écrase ces oscillations ; il ne faut pas conclure trop vite du comportement du numérateur à celui du quotient.

5. Affirmation 5 : FAUSSE.

Abscisses des points d'intersection. On résout

$$-x^2 + 4x + 1 = x + 1 \iff -x^2 + 3x = 0 \iff x(3 - x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 3,$$

ce qui correspond bien aux deux points $(0; 1)$ et $(3; 4)$ lus sur la figure, extrémités du domaine grisé.

Position relative. Pour tout $x \in [0; 3]$, $(-x^2 + 4x + 1) - (x + 1) = x(3 - x) \geq 0$: sur cet intervalle la parabole est au-dessus de la droite, ce que confirme le graphique.

Calcul de l'aire. L'aire du domaine compris entre deux courbes est l'intégrale de la différence « courbe du haut moins courbe du bas » :

$$\mathcal{A} = \int_0^3 \left((-x^2 + 4x + 1) - (x + 1) \right) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx.$$

Une primitive de $x \mapsto 3x - x^2$ est $x \mapsto \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$, donc

$$\mathcal{A} = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3} \right) - 0 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2} = 4,5.$$

L'aire du domaine grisé vaut 4,5 unités d'aire, et non 6,5 : l'affirmation est fausse.

Ce que le correcteur attend : on intègre la *différence* des deux fonctions sur $[0; 3]$, et non la seule parabole (qui donnerait $\int_0^3 (-x^2 + 4x + 1) dx = 12$) ; la lecture graphique confirme l'ordre de grandeur, le domaine grisé tenant dans un rectangle de 3 sur 4 sans en remplir la moitié.