

Physique-chimie

Baccalauréat général 2025 — épreuve de spécialité

Métropole, mardi 17 juin 2025 (25-PYCJ1ME1)

Corrigé

Trois exercices

Exercice 1

Sujet — Un emballage intelligent au rayon poissonnerie — 9 points

Un emballage « intelligent » est un emballage alimentaire capable d'afficher, à destination du client, des informations qui s'actualisent automatiquement au cours du temps. On trouve par exemple, sur certains emballages de produits frais au rayon poissonnerie, une pastille qui informe de la fraîcheur du filet de poisson qu'ils contiennent. Ces pastilles sont imbibées d'un indicateur coloré.

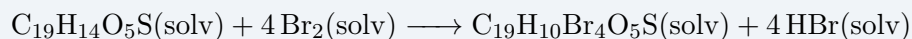
Dans cet exercice, on souhaite vérifier si le bleu de bromophénol, un indicateur coloré acide-base noté BBP dans la suite de l'exercice, peut convenir pour la réalisation de ce type de pastille.

1. Synthèse du bleu de bromophénol Pour synthétiser et caractériser le BBP ($\text{C}_{19}\text{H}_{10}\text{Br}_4\text{O}_5\text{S}$), on réalise le protocole suivant :

- étape n°1 : dissoudre dans un erlenmeyer une masse $m = 201$ mg de rouge de phénol ($\text{C}_{19}\text{H}_{14}\text{O}_5\text{S}$) dans 10 mL d'éthanol. Agiter, puis ajouter goutte à goutte une solution contenant du perbromure de pyridinium, qui permet de libérer du dibrome Br_2 dans le milieu ;
- étape n°2 : éliminer le solvant jusqu'à obtenir des cristaux au fond du ballon. Filtrer puis sécher les cristaux à l'étuve. Le produit solide obtenu est appelé par la suite le produit synthétisé brut ;
- étape n°3 : réaliser une chromatographie sur couche mince des réactifs et du produit synthétisé brut ;
- étape n°4 : enregistrer les spectres d'absorption du BBP de référence et du produit synthétisé brut.

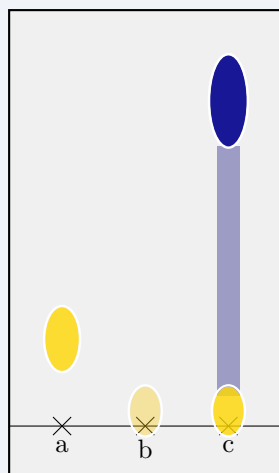
Données :

- équation de la réaction modélisant la synthèse du BBP :



où (solv) signifie dissous dans le solvant, ici l'éthanol ;

- concentration standard : $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
- température de fusion du BBP : $\theta_{\text{fusion}} = 273 \text{ }^\circ\text{C}$;
- pour discuter de l'accord du résultat d'une mesure avec une valeur de référence, on peut utiliser le quotient $\frac{|x - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$ avec x la valeur mesurée, x_{ref} la valeur de référence et $u(x)$ l'incertitude-type associée à la valeur mesurée x ;
- chromatogramme obtenu du produit synthétisé brut (les espèces étant dissoutes dans un solvant adapté) :



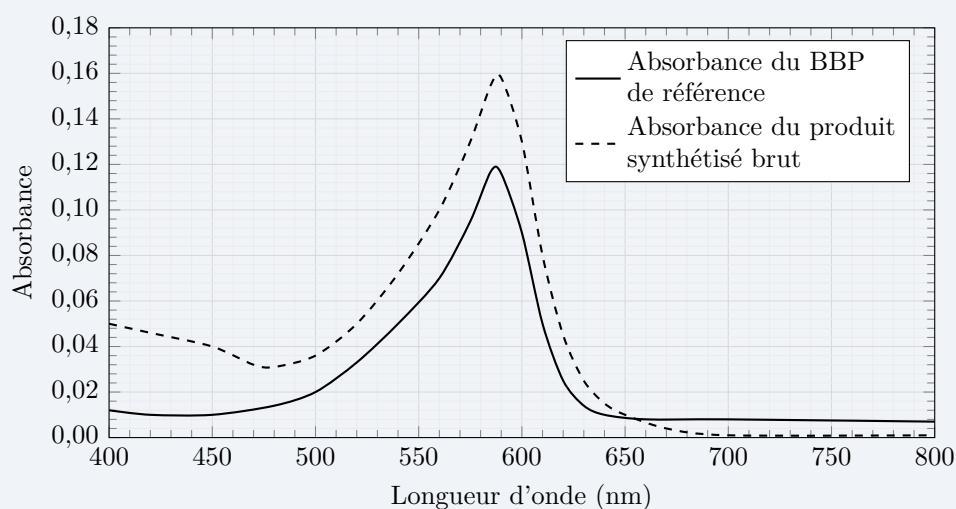
a : rouge de phénol

b : perbromure de pyridinium

c : produit synthétisé brut à l'état final

(les espèces ont été dissoutes dans un solvant adapté)

— spectres d'absorption du BBP de référence et du produit synthétisé brut :



Q1. Donner un titre aux étapes du protocole, en choisissant parmi les propositions suivantes : analyse du produit brut ; transformation des réactifs ; séparation.

Q2. En vous appuyant sur le chromatogramme obtenu, montrer qu'une transformation chimique a eu lieu et préciser si le produit synthétisé brut est pur.

Q3. À l'aide des spectres d'absorption proposés, justifier que le produit brut contient du BBP.

Q4. Citer une autre méthode permettant d'identifier le produit brut.

2. Identification du produit synthétisé par une mesure de pK_A Le produit brut obtenu est purifié. On se propose d'en déterminer la constante d'acidité associée pour confirmer qu'il s'agit de BBP, en étudiant la courbe de titrage d'une solution contenant cette espèce par une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium.

Q5. Le BBP est un indicateur coloré acide-base dont le couple acide-base est noté $BH_2(aq)/BH^-(aq)$. Donner l'expression de la constante d'acidité K_A de ce couple en fonction de $[BH_2]$, $[BH^-]$, $[H_3O^+]$, concentrations des espèces à l'équilibre chimique, ainsi que de la concentration standard c° .

Q6. À partir de l'expression précédente, établir la relation suivante :

$$pH = pK_A + \log \left(\frac{[BH^-]}{[BH_2]} \right)$$

On prépare une solution S_a du produit de synthèse purifié. On réalise un titrage de la solution S_a à l'aide d'une solution S_b d'hydroxyde de sodium, suivi par pH-métrie.

L'équation de la réaction support du titrage est :



La courbe de titrage est donnée sur la figure 1 ci-dessous.

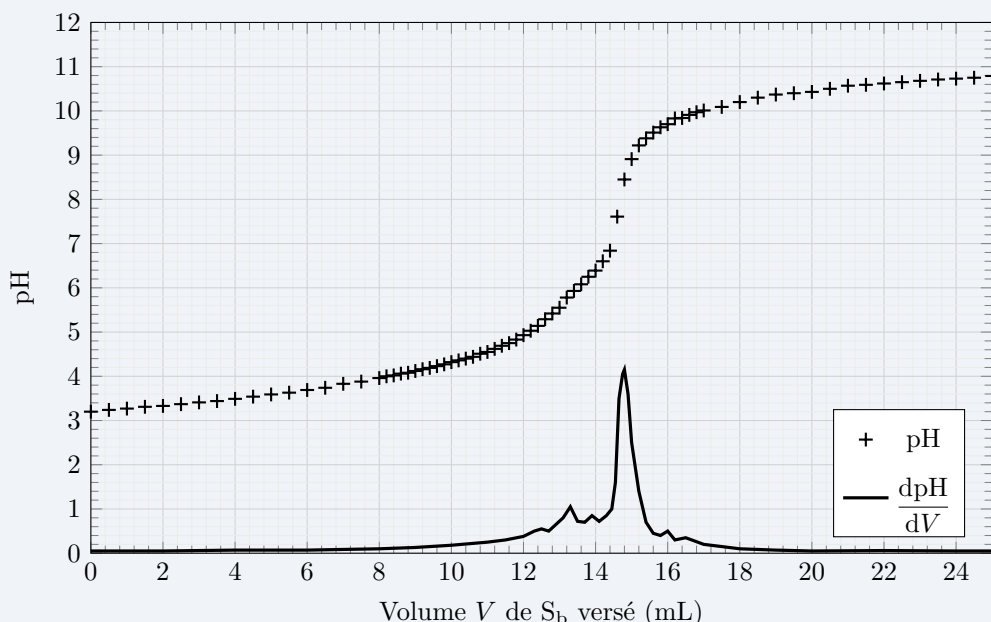


Figure 1. Courbes de suivi pH-métrique et dérivée $\frac{dpH}{dV}$ du titrage de la solution S_a

Q7. Définir l'équivalence d'un titrage.

Q8. En explicitant la méthode, déterminer le volume V_E de solution S_b versé à l'équivalence. Pour déterminer expérimentalement le pK_A du couple $\text{BH}_2(\text{aq})/\text{BH}^-(\text{aq})$, on s'intéresse à un point particulier de la courbe, la demi-équivalence, atteint pour un volume versé égal à $\frac{V_E}{2}$.

Q9. Montrer que $[\text{BH}^-] = [\text{BH}_2]$ à la demi-équivalence.

Q10. En déduire, en explicitant la démarche utilisée, la valeur expérimentale du pK_A du couple $\text{BH}_2(\text{aq})/\text{BH}^-(\text{aq})$.

Q11. Sachant que la valeur tabulée du pK_A à 25 °C de ce couple est égale à 4,1, indiquer si la valeur obtenue à la question **Q10** est compatible avec la présence de BBP dans le produit de synthèse purifié. L'incertitude-type sur la mesure du pK_A est évaluée à $u(pK_A) = 0,3$.

3. Étude de la couleur de la pastille dans l'emballage intelligent Une pastille est imprégnée par une solution de BBP. Cet indicateur coloré a des formes acide et basique de couleurs différentes en solution. On donne ci-dessous le spectre d'absorption d'une solution aqueuse contenant majoritairement la forme acide :

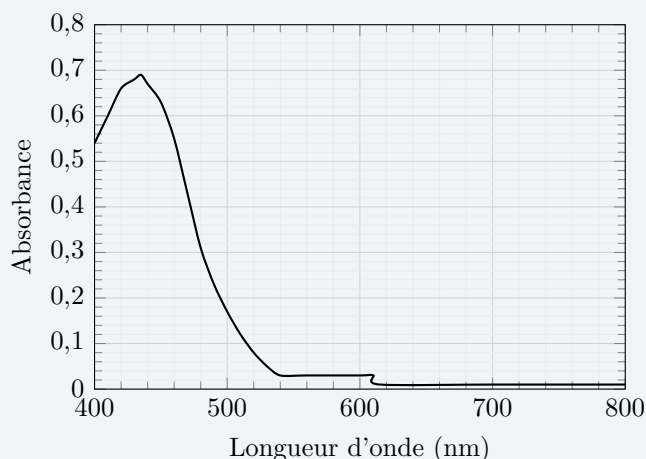


Figure 2. Spectre d'absorption d'une solution aqueuse de BBP de pH = 2,0, contenant majoritairement la forme acide

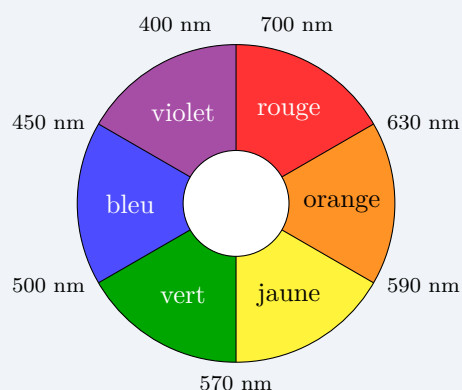


Figure 3. Cercle chromatique

Données :

- une solution contenant majoritairement la forme basique du BBP est de couleur bleue ;
- masse volumique de l'eau à 20 °C : $\rho_{\text{eau}} = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$;
- masse molaire du chlorure d'hydrogène : $M = 36,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- règles de nomenclature :
 - pour les squelettes carbonés : pour les hydrocarbures ramifiés, la position de la ramification sur la chaîne principale est indiquée par un chiffre et le groupe est indiqué par le préfixe. Si plusieurs groupes sont identiques, on précède le préfixe par di, tri ou tétra, respectivement pour 2, 3 ou 4 groupes identiques.

Méthyl CH_3^-	Éthyl $\text{CH}_3-\text{CH}_2^-$	Propyl $\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2^-$
---------------------------	--------------------------------------	---

- pour les dérivés de l'ammoniac : si l'atome d'azote du groupe fonctionnel possède plus qu'un groupe substituant, le groupe substituant est nommé suivant la règle pour les squelettes carbonés et précédé de la lettre « N » :

$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{NH}_2$ propanamine Cas 1 – Aucun substituant sur le groupe azoté	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{N}(\text{CH}_3)-\text{CH}_2-\text{CH}_3$ N-éthyl-N-méthylpropanamine Cas 3 – Deux substituants différents sur le groupe azoté
$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{NH}-\text{CH}_3$ N-méthylpropanamine Cas 2 – Un substituant sur le groupe azoté	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{N}(\text{CH}_2-\text{CH}_3)_2$ N,N-diéthylpropanamine Cas 4 – Deux substituants identiques sur le groupe azoté

Q12. Montrer que la solution contenant la forme acide du BBP est de couleur jaune.

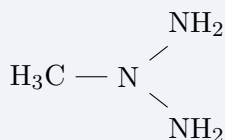
Pour obtenir le spectre de la figure 2, il est nécessaire de préparer une solution d'acide chlorhydrique de pH = 2,0. La solution commerciale utilisée au laboratoire est de titre massique $t_m = 37 \%$ et de densité $d = 1,18$. On dispose de pipettes jaugées de volumes usuels entre 1,0 mL et 50,0 mL et d'une fiole jaugée de volume $V = 200,0 \text{ mL}$.

Q13. Montrer qu'il est impossible de préparer cette solution en ne réalisant qu'une seule dilution avec le matériel proposé.

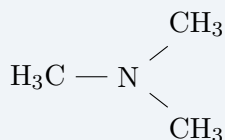
Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti. La démarche est évaluée et nécessite d'être correctement présentée.

Au cours du temps, les bactéries contenues dans le poisson produisent naturellement des molécules de *N,N*-diméthylméthanamine qui entrent en contact avec la pastille imbibée de BBP.

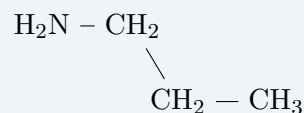
Q14. Choisir, parmi les trois formules semi-développées suivantes, celle qui correspond à la molécule de *N,N*-diméthylméthanamine.



Molécule A



Molécule B



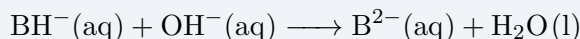
Molécule C

Au cours de la dégradation du poisson, qui se réalise sur plusieurs jours, la *N,N*-diméthylméthanamine, composé volatil, est produite. La pastille de BBP initialement jaune se colore alors en bleu.

Q15. Écrire l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique responsable de ce changement de couleur. On note $\text{BH}_2(\text{aq})/\text{BH}^-(\text{aq})$ le couple acide-base correspondant au BBP, et $\text{R}_3\text{NH}^+(\text{aq})/\text{R}_3\text{N}(\text{aq})$ celui associé à la *N,N*-diméthylméthanamine.

4. Cinétique d'ordre 1 de la décoloration du BBP en présence d'ion hydroxyde

L'ion BH^- est une espèce amphotère. Les molécules de *N,N*-diméthylméthanamine produites lors de la dégradation du poisson rendent le milieu basique. En milieu très basique, le BBP se décolore selon une transformation chimique lente, considérée totale et modélisée par la réaction d'équation suivante :



Q16. Justifier le caractère amphotère de l'ion BH^- .

On souhaite savoir si cette transformation peut nuire à l'efficacité d'un emballage intelligent. Pour cela, on suit l'évolution de la concentration en ions BH^- , en fonction du temps, dans une solution très basique. Le protocole mis en place est le suivant :

- placer un volume d'une solution contenant des ions BH^- dans une fiole jaugée de 50,0 mL ;
- compléter jusqu'au trait de jauge avec une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium introduite en excès ;
- suivre l'évolution de l'absorbance par spectrophotométrie pendant une trentaine de minutes et tracer l'évolution temporelle de la concentration en ions BH^- , notée $[\text{BH}^-]$ (voir figure 4).

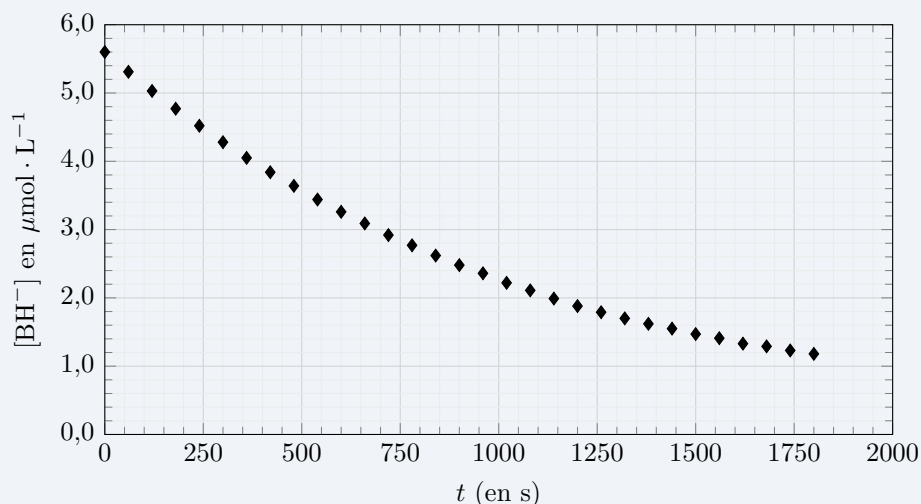


Figure 4. Évolution temporelle de la concentration en ions BH^-

Q17. Après avoir déterminé le temps de demi-réaction, indiquer si ce temps caractéristique et la réaction associée sont adaptés à une utilisation dans la pastille d'un emballage intelligent. Détailler votre raisonnement en explicitant les évolutions de la couleur de la pastille de l'emballage au cours du temps.

Corrigé

1. Synthèse du bleu de bromophénol **Q1.** Étape n°1 : **transformation des réactifs** (le rouge de phénol réagit avec le dibrome libéré). Étape n°2 : **séparation** (évaporation du solvant, filtration et séchage isolent le solide). Étapes n°3 et n°4 : **analyse du produit brut** (chromatographie sur couche mince, puis spectres d'absorption).

Q2. Dans les mêmes conditions d'élution, une espèce donnée migre toujours à la même hauteur. Sur le chromatogramme, le dépôt c (produit brut) ne présente *aucune* tache à la hauteur de la tache du rouge de phénol (dépôt a) : le réactif a été consommé. En revanche, c présente une tache bleu foncé, haute, qui n'existe ni en a ni en b : une nouvelle espèce s'est formée. Consommation d'un réactif et apparition d'un produit : une **transformation chimique a bien eu lieu**. Le dépôt c comporte **deux** taches, dont une au niveau de la ligne de dépôt, à la même hauteur que celle du perbromure de pyridinium (dépôt b) : le produit brut contient encore ce réactif (qui n'a pas été entièrement consommé), il **n'est pas pur**.

Q3. Le spectre du produit brut et celui du BBP de référence ont la même allure et surtout le **même maximum d'absorption**, à $\lambda_{\text{max}} \approx 590 \text{ nm}$. Or la longueur d'onde du maximum d'absorption caractérise l'espèce colorée (loi de Beer-Lambert : l'absorbance dépend de la concentration, mais λ_{max} n'en dépend pas) : le produit brut contient donc du BBP. L'absorbance plus élevée (0,16 contre 0,12) traduit seulement une concentration différente, et l'absorbance résiduelle vers 400–450 nm peut être attribuée aux impuretés (perbromure de pyridinium) mises en évidence en Q2.

Q4. Le produit brut est un solide dont on connaît la température de fusion de référence (273 °C) : on peut mesurer sa **température de fusion** et la comparer à cette valeur (avec un appareil à point de fusion capillaire : le banc Kofler usuel, gradué jusqu'à 260 °C environ, ne suffirait pas ici). On peut aussi enregistrer un **spectre infrarouge** (ou de RMN) et le comparer à celui du BBP de référence.

2. Identification par une mesure de pK_A **Q5.** La constante d'acidité est la constante d'équilibre de la réaction de l'acide BH_2 avec l'eau, $\text{BH}_2(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightleftharpoons \text{BH}^-(\text{aq}) +$

$\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$:

$$K_A = \frac{[\text{BH}^-]_{\text{éq}} [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{éq}}}{[\text{BH}_2]_{\text{éq}} c^\circ}$$

(grandeur sans unité : chaque concentration est rapportée à $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$).

Q6. On prend le logarithme décimal de l'expression précédente :

$$\log K_A = \log \frac{[\text{BH}^-]}{[\text{BH}_2]} + \log \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^\circ}.$$

Par définition, $\text{p}K_A = -\log K_A$ et $\text{pH} = -\log \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^\circ}$, d'où $-\text{p}K_A = \log \frac{[\text{BH}^-]}{[\text{BH}_2]} - \text{pH}$, soit

$$\text{pH} = \text{p}K_A + \log \left(\frac{[\text{BH}^-]}{[\text{BH}_2]} \right).$$

Q7. L'équivalence d'un titrage est l'état du système pour lequel les réactifs titré et titrant ont été introduits dans les **proportions stœchiométriques** de la réaction support : ils sont alors tous deux entièrement consommés (changement de réactif limitant). Ici, à l'équivalence, $n(\text{OH}^-)_{\text{versé}} = n(\text{BH}_2)_{\text{initial}}$.

Q8. *Méthode de la dérivée* : au voisinage de l'équivalence, le pH varie brutalement (saut de pH), donc la dérivée $\frac{\text{dpH}}{\text{d}V}$ passe par un **maximum** dont l'abscisse est V_E . Sur la figure 1, le pic de la courbe dérivée (valeur maximale voisine de 4,2) est situé à

$$V_E = 14,8 \text{ mL}$$

(la méthode des tangentes parallèles, appliquée au saut de pH entre 6 et 9, donne la même valeur). *Ce que le correcteur attend* : la méthode nommée, et une lecture entre 14,7 et 14,9 mL.

Q9. Notons $n_0 = n(\text{BH}_2)_{\text{initial}}$. Avant l'équivalence, l'ion OH^- versé est le réactif limitant et la réaction support est totale : pour un volume V versé, $n(\text{OH}^-)_{\text{versé}} = C_b V$ réagit entièrement.

	BH_2 restant	OH^- restant	BH^- formé
avant ajout	n_0	0	0
à V versé ($V < V_E$)	$n_0 - C_b V$	0	$C_b V$
à $V = V_E$	0	0	$n_0 = C_b V_E$

À la demi-équivalence, $V = \frac{V_E}{2}$, donc $C_b V = \frac{C_b V_E}{2} = \frac{n_0}{2}$: il reste $n(\text{BH}_2) = n_0 - \frac{n_0}{2} = \frac{n_0}{2}$ et il s'est formé $n(\text{BH}^-) = \frac{n_0}{2}$. Les deux espèces, en quantités égales dans le même volume de solution, ont la même concentration : $[\text{BH}^-] = [\text{BH}_2]$.

Q10. D'après Q6, lorsque $[\text{BH}^-] = [\text{BH}_2]$, $\log 1 = 0$ et $\text{pH} = \text{p}K_A$: le $\text{p}K_A$ est le pH à la demi-équivalence. On calcule $\frac{V_E}{2} = \frac{14,8}{2} = 7,4 \text{ mL}$, puis on lit sur la figure 1 le pH du point d'abscisse 7,4 mL : les croix voisines (7,0 et 7,5 mL) sont situées entre les graduations 3,8 et 4,0, un peu au-dessous de 3,9 (le pH vaut 4,0 à 8 mL), d'où

$$\text{p}K_A = \text{pH} \left(\frac{V_E}{2} \right) \approx 3,9.$$

Q11. On compare la valeur mesurée à la valeur tabulée avec le quotient fourni :

$$\frac{|\text{p}K_A - \text{p}K_{A,\text{ref}}|}{u(\text{p}K_A)} = \frac{|3,9 - 4,1|}{0,3} = 0,7.$$

Ce quotient est inférieur à 2 : l'écart entre les deux valeurs est inférieur à l'incertitude-type, la valeur expérimentale est **compatible** avec la valeur tabulée. Le résultat est cohérent avec la présence de BBP dans le produit purifié (il ne la *prouve* pas à lui seul : un autre acide de $\text{p}K_A$ voisin donnerait le même résultat, d'où l'intérêt des analyses de la partie 1).

3. Couleur de la pastille Q12. Sur la figure 2, l'absorbance de la forme acide est maximale pour $\lambda_{\max} \approx 435$ nm (entre 400 et 450 nm) : la solution absorbe essentiellement les radiations **violettes** et laisse passer les autres. La couleur perçue est la couleur **complémentaire** de celle absorbée, diamétralement opposée sur le cercle chromatique (figure 3) : en face du violet se trouve le **jaune**. La solution de forme acide est donc jaune, ce qui est cohérent avec la pastille « initialement jaune » de l'énoncé.

Q13. Démarche. On calcule la concentration de la solution commerciale, celle de la solution à préparer, puis le volume à prélever, que l'on compare à la plus petite pipette disponible.

Concentration de la solution commerciale. Dans un volume V_{sol} de solution, de masse $m_{\text{sol}} = \rho_{\text{sol}} V_{\text{sol}} = d \rho_{\text{eau}} V_{\text{sol}}$, la masse de HCl est $m(\text{HCl}) = t_m m_{\text{sol}}$, d'où

$$C_{\text{com}} = \frac{n(\text{HCl})}{V_{\text{sol}}} = \frac{t_m d \rho_{\text{eau}}}{M} = \frac{0,37 \times 1,18 \times 1,0 \times 10^3}{36,5} = 12 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

($\rho_{\text{eau}} = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1} = 1,0 \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$, pour obtenir des $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ puis des $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$).

Concentration de la solution fille. L'acide chlorhydrique est un acide fort, totalement dissocié : $[\text{H}_3\text{O}^+] = C_{\text{fille}}$, donc $C_{\text{fille}} = c^\circ \times 10^{-\text{pH}} = 10^{-2,0} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Volume à prélever. Lors d'une dilution, la quantité de soluté se conserve : $C_{\text{com}} V_{\text{prélevé}} = C_{\text{fille}} V$, soit

$$V_{\text{prélevé}} = \frac{C_{\text{fille}} V}{C_{\text{com}}} = \frac{1,0 \times 10^{-2} \times 200,0}{12} = 0,17 \text{ mL}.$$

Le facteur de dilution nécessaire vaut $\frac{C_{\text{com}}}{C_{\text{fille}}} \approx 1,2 \times 10^3$, alors que le facteur maximal réalisable

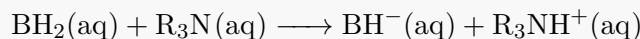
en une fois avec ce matériel est $\frac{200,0}{1,0} = 200$ (la plus petite pipette, 1,0 mL, diluée dans la fiole

de 200,0 mL donnerait $C = 6,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, soit $\text{pH} = 1,2$). Aucune pipette jaugée ne permet de prélever 0,17 mL : il est **impossible** de préparer la solution en une seule dilution. Il faut procéder en deux dilutions successives, par exemple au 1/100 (2,0 mL dans 200,0 mL) puis au 1/10 (20,0 mL dans 200,0 mL), ce qui donne $C = 1,2 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $\text{pH} \approx 1,9$, à ajuster ensuite au pH-mètre.

Ce que le correcteur attend : la relation $C = \frac{t_m d \rho_{\text{eau}}}{M}$ avec ρ_{eau} en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$, l'hypothèse « acide fort » pour passer du pH à la concentration, et une comparaison explicite avec la pipette de 1,0 mL.

Q14. Le nom *N,N*-diméthylméthanamine indique une chaîne principale à un carbone (« méthane-amine » : $\text{CH}_3\text{—NH}_2$) dont les deux atomes d'hydrogène portés par l'azote sont remplacés par deux groupes méthyle (« *N,N*-diméthyl »). La molécule est donc $(\text{CH}_3)_3\text{N}$: c'est la **molécule B**. La molécule A comporte deux groupes NH_2 (ce n'est pas une amine simple) et la molécule C est la propan-1-amine (chaîne à trois carbones, azote non substitué).

Q15. L'amine R_3N est une base (elle capte un proton) et la forme jaune BH_2 est un acide (elle en cède un). La réaction acido-basique, transfert d'un proton de l'acide BH_2 vers la base R_3N , s'écrit :



La forme basique BH^- (bleue) remplace la forme acide BH_2 (jaune) : la pastille bleuit.

4. Cinétique de la décoloration Q16. Une espèce est amphotère si elle est l'acide d'un couple et la base d'un autre. L'ion BH^- est la **base** du couple BH_2/BH^- (il capte un proton pour redonner BH_2) et l'**acide** du couple $\text{BH}^-/\text{B}^{2-}$ (dans la réaction de décoloration, il cède un proton à OH^- pour former B^{2-} et H_2O). Il est donc amphotère.

Q17. Temps de demi-réaction. L'ion hydroxyde est en excès : BH^- est le réactif limitant, totalement consommé. Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle l'avancement

atteint la moitié de sa valeur finale, c'est-à-dire ici la durée au bout de laquelle la concentration du réactif limitant est divisée par deux. Sur la figure 4, $[\text{BH}^-]_0 = 5,6 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$; on cherche la date où $[\text{BH}^-] = 2,8 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$: les points voisins sont (720 s ; 2,9) et (780 s ; 2,8), d'où

$$t_{1/2} \approx 7,7 \times 10^2 \text{ s} \approx 13 \text{ min}$$

(toute lecture entre 750 et 800 s est acceptable). On vérifie l'ordre 1 : la concentration est encore divisée par deux ($1,4 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) vers 1 550 s, soit une nouvelle durée voisine de $t_{1/2}$.

Évolution de la couleur de la pastille. Poisson frais : le milieu est acide, le BBP est sous sa forme BH_2 , la pastille est **jaune**. Au fil des jours, la *N,N*-diméthylméthanamine produite par les bactéries rend le milieu basique : la réaction de Q15 forme BH^- , la pastille devient **bleue**. Mais en milieu très basique, BH^- est à son tour transformé en B^{2-} , incolore, avec $t_{1/2} \approx 13 \text{ min}$: au bout de quelques $t_{1/2}$, soit environ une heure, la quasi-totalité du BBP est décolorée (après 5 $t_{1/2}$ il ne reste que 3 % de BH^-) et la pastille devient **incolore**.

Conclusion. La dégradation du poisson s'étale sur plusieurs jours alors que la décoloration ne prend qu'une heure : la phase bleue, qui devait signaler au client que le poisson n'est plus frais, est fugace. Le client observerait le plus souvent une pastille incolore, dont la signification est ambiguë (pastille défectueuse ? poisson frais ?). Ce temps de demi-réaction, trop court devant la durée du phénomène à surveiller, et cette réaction de décoloration ne sont donc **pas adaptés** à un emballage intelligent, sauf à indiquer clairement au client que seule la couleur jaune garantit la fraîcheur.

Exercice 2

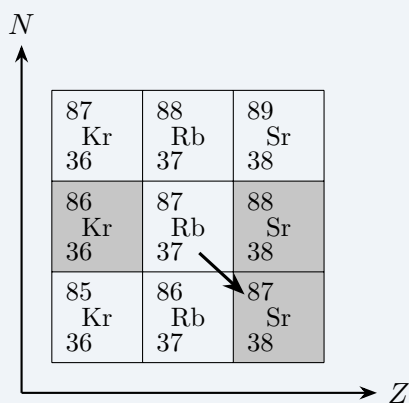
Sujet — Datation d'une roche — 6 points

Les phénomènes de radioactivité permettent, en géologie, la datation des roches. Il est par exemple possible d'utiliser le strontium 87 (^{87}Sr), qui est notamment issu de la désintégration du rubidium 87 (^{87}Rb), lui-même également présent dans une roche.

Les objectifs de cet exercice sont d'étudier le principe de la datation au strontium 87, puis d'utiliser des résultats d'analyse pour déterminer l'âge d'une roche du site de Meymac situé dans le département de la Corrèze, site âgé de plusieurs centaines de millions d'années.

Données :

- temps de demi-vie du noyau de rubidium 87 exprimé en années (a) : $t_{1/2} = 49,2 \times 10^9$ a ;
- constante radioactive du noyau de rubidium 87 : $\lambda = 1,41 \times 10^{-11} \text{ a}^{-1}$;
- on suppose qu'une datation d'un échantillon de 1 g de roche par le rubidium 87 radioactif est possible tant qu'il reste au moins $N_{\min} = 2,0 \times 10^9$ noyaux de rubidium 87 dans l'échantillon ;
- extrait du diagramme (N,Z) : les cases grises indiquent les éléments stables.



1. Le rubidium 87, un isotope radioactif adapté pour dater une roche **Q1.** Rappeler la définition de noyaux isotopes.

Q2. Écrire l'équation de la désintégration du rubidium 87 indiquée par la flèche sur l'extrait du diagramme (N,Z).

Q3. Préciser à quel type de désintégration correspond cette transformation nucléaire.

On estime qu'un échantillon de 1 g de roche du site de Meymac contenait à sa formation $N_{\text{Rb}}(0) = 5,8 \times 10^{20}$ noyaux de rubidium 87. On souhaite déterminer l'âge maximal d'une roche qu'il serait possible de déterminer par une datation au rubidium 87 d'un échantillon de 1 g.

Q4. Rappeler la définition du temps de demi-vie $t_{1/2}$.

Q5. Déterminer, en justifiant le résultat, le nombre maximal de demi-vies après lequel il reste suffisamment de rubidium 87 dans l'échantillon pour qu'on puisse le détecter.

On remarquera que le rapport $\frac{5,8 \times 10^{20}}{2,0 \times 10^9}$ est compris entre 2^{38} et 2^{39} .

Q6. Justifier que le rubidium 87 est adapté pour dater un échantillon de 1 g de roche du site de Meymac.

2. Décroissance radioactive du rubidium 87 dans une roche La désintégration spontanée des noyaux de rubidium 87 présents dans un échantillon de 1 g de roche suit la loi de décroissance radioactive. Le nombre $N_{\text{Rb}}(t)$ de noyaux de rubidium 87 présents dans un échantillon de roche à la date t est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN_{\text{Rb}}(t)}{dt} = -\lambda \cdot N_{\text{Rb}}(t)$$

Q7. Vérifier que $N_{\text{Rb}}(t) = N_{\text{Rb}}(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ est solution de l'équation différentielle ci-dessus.

On appelle t_f la date à laquelle il reste $N_{\text{min}} = 2,0 \times 10^9$ noyaux de rubidium 87 dans l'échantillon.

Q8. Déterminer l'expression de t_f en fonction de N_{min} , $N_{\text{Rb}}(0)$ et λ .

Q9. Calculer la valeur de t_f puis la comparer à la réponse donnée dans la question **Q6**. Commenter.

3. Datation d'une roche du site de Meymac au strontium 87 On considère que la quantité de strontium 87 formé au cours du temps dans la roche est uniquement issue de la désintégration du rubidium 87. La quantité de strontium 87 présent dans la roche à une date t s'écrit :

$$N_{\text{Sr}}(t) = N_{\text{Sr}}(0) + N_{\text{Sr formé}}(t) \quad \text{Équation 1}$$

avec :

- $N_{\text{Sr}}(t)$: nombre de noyaux de strontium 87 présents à la date t ;
- $N_{\text{Sr}}(0)$: nombre de noyaux de strontium 87 présents à la date $t = 0$;
- $N_{\text{Sr formé}}(t)$: nombre de noyaux de strontium 87 formés par la désintégration du rubidium 87 à la date t .

Q10. Donner la relation entre $N_{\text{Sr formé}}(t)$, $N_{\text{Rb}}(0)$ et $N_{\text{Rb}}(t)$, sachant que pour un noyau de rubidium 87 qui se désintègre, un noyau de strontium 87 se forme.

Q11. En déduire l'égalité :

$$N_{\text{Sr formé}}(t) = N_{\text{Rb}}(t) \cdot (e^{\lambda \cdot t} - 1) \quad \text{Équation 2}$$

Les équations 1 et 2 permettent enfin d'obtenir l'équation 3 :

$$\frac{N_{\text{Sr}}(t)}{N_{\text{réf}}} = \frac{N_{\text{Sr}}(0)}{N_{\text{réf}}} + (e^{\lambda \cdot t} - 1) \cdot \frac{N_{\text{Rb}}(t)}{N_{\text{réf}}} \quad \text{Équation 3}$$

où $N_{\text{réf}}$ représente le nombre de noyaux stables de strontium 86, supposé constant au cours du temps.

On écrit l'équation 3 sous la forme $y = b + (e^{\lambda \cdot t} - 1) \cdot x$ avec $y = \frac{N_{\text{Sr}}(t)}{N_{\text{réf}}}$, $b = \frac{N_{\text{Sr}}(0)}{N_{\text{réf}}}$ et

$x = \frac{N_{\text{Rb}}(t)}{N_{\text{réf}}}$, dans laquelle :

- y et x sont des grandeurs mesurables par les géologues pour un ensemble d'échantillons prélevés dans une roche donnée ;

— b est une grandeur indépendante de l'échantillon.

Plusieurs échantillons de roche du site de Meymac sont prélevés à la date t_{roche} correspondant à l'âge de la roche. Pour chaque échantillon, on mesure les grandeurs x et y . Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 1 ci-après :

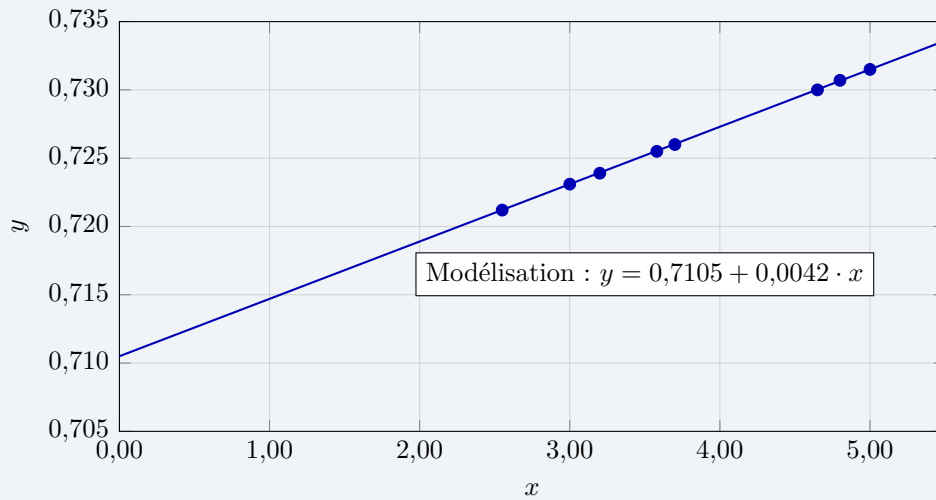


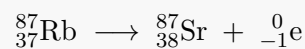
Figure 1. Mesures pour différents échantillons de roche du site de Meymac

Q12. Déterminer l'âge t_{roche} de la roche du site de Meymac.

Corrigé

1. Le rubidium 87, un isotope adapté **Q1.** Des noyaux **isotopes** sont des noyaux qui possèdent le même nombre de protons Z (ils appartiennent au même élément chimique) mais des nombres de neutrons N différents, donc des nombres de masse $A = Z + N$ différents. Sur l'extrait du diagramme, les trois noyaux d'une même colonne (par exemple ^{86}Rb , ^{87}Rb , ^{88}Rb , $Z = 37$) sont isotopes.

Q2. La flèche part de la case du rubidium 87 ($Z = 37$, $N = 50$) et arrive sur celle du strontium 87 ($Z = 38$, $N = 49$) : le nombre de masse $A = 87$ est conservé, Z augmente d'une unité et N diminue d'une unité. D'après les lois de conservation de Soddy (conservation du nombre de masse et de la charge électrique), la particule émise a pour nombre de masse $87 - 87 = 0$ et pour numéro atomique $37 - 38 = -1$: c'est un électron ${}^0_{-1}\text{e}$. L'équation s'écrit



(un antineutrino, hors programme, accompagne l'électron).

Q3. La particule émise est un électron : il s'agit d'une désintégration β^- (bêta moins), au cours de laquelle un neutron du noyau se transforme en proton. Elle est cohérente avec la position du rubidium 87 dans le diagramme, au-dessus des cases grises : un excès de neutrons est corrigé par une émission β^- , qui ramène le noyau vers la vallée de stabilité (le strontium 87 est stable).

Q4. Le temps de demi-vie $t_{1/2}$ d'un noyau radioactif est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents dans un échantillon se sont désintégrés : $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$. C'est une caractéristique du noyau, indépendante de la taille de l'échantillon.

Q5. Après chaque demi-vie, le nombre de noyaux est divisé par 2 : après n demi-vies, il reste

$$N_{\text{Rb}}(n t_{1/2}) = \frac{N_{\text{Rb}}(0)}{2^n}.$$

La datation reste possible tant que $N_{\text{Rb}} \geq N_{\text{min}}$, c'est-à-dire tant que

$$\frac{N_{\text{Rb}}(0)}{2^n} \geq N_{\text{min}} \iff 2^n \leq \frac{N_{\text{Rb}}(0)}{N_{\text{min}}} = \frac{5,8 \times 10^{20}}{2,0 \times 10^9} = 2,9 \times 10^{11}.$$

D'après l'indication de l'énoncé, ce rapport est compris entre 2^{38} et 2^{39} ($2^{38} = 2,7 \times 10^{11}$ et $2^{39} = 5,5 \times 10^{11}$) : la condition est satisfaite pour $n = 38$ et ne l'est plus pour $n = 39$. Le nombre maximal de demi-vies est donc $n_{\text{max}} = 38$. *Vérification* : après 38 demi-vies, il reste $\frac{5,8 \times 10^{20}}{2^{38}} = 2,1 \times 10^9$ noyaux ($\geq N_{\text{min}}$), et après 39 seulement $1,1 \times 10^9$ ($< N_{\text{min}}$).

Q6. L'âge maximal que l'on peut mesurer avec 1 g de roche est donc

$$t_{\text{max}} = 38 t_{1/2} = 38 \times 49,2 \times 10^9 = 1,9 \times 10^{12} \text{ a},$$

soit près de deux mille milliards d'années, très supérieur à l'âge de la roche de Meymac (quelques centaines de millions d'années, ordre de grandeur 10^8 a) et même à l'âge de l'Univers ($1,4 \times 10^{10}$ a). Il reste donc, dans 1 g de roche, bien plus de N_{min} noyaux de rubidium 87 détectables : le rubidium 87 est adapté à la datation de cette roche.

2. Décroissance radioactive **Q7.** On dérive la fonction proposée par rapport au temps (dérivée de $e^{-\lambda t}$: $-\lambda e^{-\lambda t}$) :

$$\frac{dN_{\text{Rb}}(t)}{dt} = N_{\text{Rb}}(0) \times (-\lambda) e^{-\lambda t} = -\lambda [N_{\text{Rb}}(0) e^{-\lambda t}] = -\lambda N_{\text{Rb}}(t).$$

L'équation différentielle est vérifiée ; de plus, à $t = 0$, $e^0 = 1$ et la fonction vaut bien $N_{\text{Rb}}(0)$: c'est la loi de décroissance radioactive.

Q8. À la date t_f , $N_{\text{Rb}}(t_f) = N_{\text{min}}$, soit $N_{\text{min}} = N_{\text{Rb}}(0) e^{-\lambda t_f}$. On isole l'exponentielle puis on prend le logarithme népérien :

$$e^{-\lambda t_f} = \frac{N_{\text{min}}}{N_{\text{Rb}}(0)} \implies -\lambda t_f = \ln \frac{N_{\text{min}}}{N_{\text{Rb}}(0)} \implies t_f = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_{\text{Rb}}(0)}{N_{\text{min}}}$$

(on a utilisé $-\ln \frac{a}{b} = \ln \frac{b}{a}$; t_f est bien positif car $N_{\text{Rb}}(0) > N_{\text{min}}$).

Q9. Application numérique :

$$t_f = \frac{1}{1,41 \times 10^{-11}} \times \ln \frac{5,8 \times 10^{20}}{2,0 \times 10^9} = \frac{\ln (2,9 \times 10^{11})}{1,41 \times 10^{-11}} = \frac{26,4}{1,41 \times 10^{-11}} = 1,9 \times 10^{12} \text{ a}.$$

On retrouve la valeur $38 t_{1/2} \approx 1,9 \times 10^{12}$ a de la question Q6. C'est normal : comme $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$,

on a $t_f = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_{\text{Rb}}(0)}{N_{\text{min}}} = t_{1/2} \times \log_2(2,9 \times 10^{11}) = 38,1 t_{1/2}$: le calcul exact avec la loi exponentielle confirme le raisonnement par demi-vies successives, qui n'en donne que la partie entière. *Ce que le correcteur attend* : λ en a^{-1} donne t_f en années, sans conversion.

3. Datation au strontium 87 **Q10.** Chaque noyau de rubidium 87 disparu a donné un noyau de strontium 87. Le nombre de noyaux de strontium 87 formés à la date t est donc égal au nombre de noyaux de rubidium 87 qui se sont désintégrés depuis la formation de la roche :

$$N_{\text{Sr formé}}(t) = N_{\text{Rb}}(0) - N_{\text{Rb}}(t).$$

Q11. D'après la loi de décroissance, $N_{\text{Rb}}(t) = N_{\text{Rb}}(0) e^{-\lambda t}$, d'où $N_{\text{Rb}}(0) = N_{\text{Rb}}(t) e^{\lambda t}$. En remplaçant dans la relation de Q10 :

$$N_{\text{Sr formé}}(t) = N_{\text{Rb}}(t) e^{\lambda t} - N_{\text{Rb}}(t) = N_{\text{Rb}}(t) (e^{\lambda t} - 1).$$

(En reportant dans l'équation 1 et en divisant par $N_{\text{réf}}$, on obtient l'équation 3.)

Q12. Démarche. Tous les échantillons ont le même âge t_{roche} et la même valeur de b (grandeur indépendante de l'échantillon) : d'après l'équation 3, les points $(x; y)$ sont alignés sur une droite d'ordonnée à l'origine b et de coefficient directeur $e^{\lambda t_{\text{roche}}} - 1$. C'est bien ce que montre la figure 1, et la modélisation fournit $y = 0,7105 + 0,0042 x$. Par identification :

$$b = 0,7105 \quad \text{et} \quad e^{\lambda t_{\text{roche}}} - 1 = 0,0042.$$

On en tire $e^{\lambda t_{\text{roche}}} = 1,0042$, puis $\lambda t_{\text{roche}} = \ln(1,0042)$, soit

$$t_{\text{roche}} = \frac{\ln(1,0042)}{\lambda} = \frac{4,19 \times 10^{-3}}{1,41 \times 10^{-11}} = 2,97 \times 10^8 \text{ a} \approx 3,0 \times 10^8 \text{ a}.$$

La roche du site de Meymac est âgée d'environ 300 millions d'années, ce qui est cohérent avec l'indication de l'énoncé (« plusieurs centaines de millions d'années » : ce granite s'est mis en place à la fin de l'orogénèse hercynienne). On remarque que $\lambda t \ll 1$, donc $e^{\lambda t} - 1 \approx \lambda t$ et $t_{\text{roche}} \approx \frac{0,0042}{\lambda}$: seuls 0,4 % des noyaux de rubidium 87 se sont désintégrés depuis la formation de la roche, ce qui confirme la conclusion de Q6.

Ce que le correcteur attend : identifier le coefficient directeur (et non l'ordonnée à l'origine) à $e^{\lambda t} - 1$, prendre le logarithme népérien de 1,0042 (et non de 0,0042), et un résultat en années avec deux chiffres significatifs.

Exercice 3

Sujet — Viscosimètre à chute de bille — 5 points

Certains équipements mécaniques, comme les moteurs, nécessitent l'utilisation d'huiles de valeur de viscosité contrôlée pour pouvoir fonctionner correctement.

Le but de cet exercice est d'étudier le principe de fonctionnement d'un viscosimètre à chute de bille permettant de mesurer, à température ambiante, la viscosité d'une huile appelée « huile C ».

La mesure de la viscosité de l'huile C repose sur l'exploitation de la chute verticale d'une bille en acier dans un récipient cylindrique, rempli de cette huile, représenté sur la figure 1. Le mouvement du centre de masse de la bille est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen, muni d'un repère d'origine O, d'axe vertical (Oz) orienté vers le bas et de vecteur unitaire $\vec{k}$. La situation est schématisée sur la figure 1.

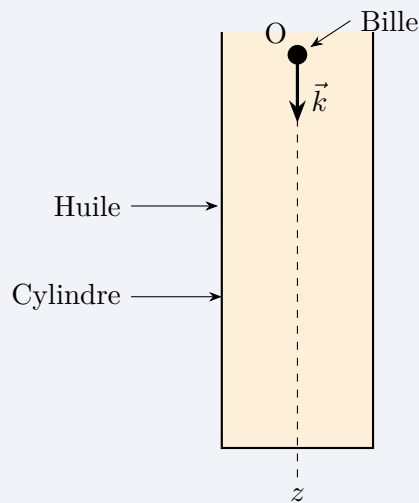


Figure 1. Schéma du dispositif expérimental de mesure

Données :

Les données numériques de cet exercice proviennent de travaux réalisés à l'université de Grenoble.

- masse volumique de l'huile C : $\rho_h = 8,31 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- masse volumique de la bille : $\rho_b = 1,06 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- rayon de la bille : $r = 0,993 \text{ mm}$;
- intensité de la pesanteur terrestre : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- volume d'une bille de rayon r : $V_b = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$;

- pour discuter de l'accord du résultat d'une mesure avec une valeur de référence, on peut utiliser le quotient $\frac{|x - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$ avec x la valeur mesurée, x_{ref} la valeur de référence et $u(x)$ l'incertitude-type associée à la valeur mesurée x .

Lors de sa chute verticale dans l'huile C, la bille de masse m est soumise à trois forces :

- son poids noté $\vec{P}$;
- la poussée d'Archimède, exercée par l'huile, d'expression vectorielle $\vec{P}_A = -\rho_h \cdot V_b \cdot g \cdot \vec{k}$;
- la force de frottement exercée par l'huile sur la bille, d'expression vectorielle dans les conditions de l'expérience : $\vec{f} = -\alpha \cdot \eta_C \cdot v \cdot \vec{k}$ avec α une constante homogène à une distance, dépendant des paramètres géométriques du système, η_C la viscosité de l'huile C et v la valeur de la vitesse du centre de masse de la bille. On donne $\alpha = 1,92 \times 10^{-2} \text{ m}$.

Q1. Montrer, à l'aide d'un raisonnement sur les unités, que la viscosité η_C s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}$.

À la date $t = 0$, la bille est lâchée avec une vitesse initiale nulle depuis le point O, situé dans l'huile, en haut du récipient cylindrique. Au bout de quelques instants, le mouvement de la bille devient rectiligne uniforme, la bille atteint alors une vitesse limite notée v_{lim} .

Q2. Préciser, en justifiant, si la valeur de la force de frottement $\vec{f}$ augmente ou diminue quand la valeur de la vitesse de la bille augmente.

Q3. Représenter sur un schéma, sans calcul et en justifiant, l'ensemble des forces appliquées au système {bille}, lorsque la vitesse limite est atteinte.

Q4. Montrer que la vitesse limite vérifie l'équation :

$$\alpha \cdot \eta_C \cdot v_{\text{lim}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot g \cdot (\rho_b - \rho_h)}{3}$$

Q5. La valeur limite de la vitesse de la bille vaut $v_{\text{lim}} = 5,37 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer la valeur de la viscosité η_C de l'huile C.

L'huile C a une viscosité de référence qui vaut $\eta_{\text{réf}} = 0,093 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}$ et l'incertitude-type sur la valeur de la viscosité η_C obtenue vaut $u(\eta_C) = 0,003 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}$.

Q6. Déterminer si la valeur de la viscosité η_C obtenue expérimentalement est en accord avec la valeur de référence.

On souhaite déterminer la durée nécessaire pour que la bille, lâchée avec une vitesse initiale nulle, atteigne sa vitesse limite.

Q7. Le vecteur accélération $\vec{a}$ du centre de masse de la bille s'écrit : $\vec{a} = a \cdot \vec{k}$. À l'aide de la deuxième loi de Newton, montrer que l'accélération a peut s'écrire :

$$a = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_h \cdot V_b}{m}\right) - \frac{\alpha \cdot \eta_C}{m} \cdot v \quad \text{où } m \text{ est la masse de la bille}$$

Q8. En déduire que l'évolution de la coordonnée v du vecteur vitesse $\vec{v}$ de chute de la bille au cours du temps obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3 \cdot \alpha \cdot \eta_C}{4 \cdot \rho_b \cdot \pi \cdot r^3} \cdot v = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho_b}\right)$$

Si la bille est abandonnée avec une vitesse initiale nulle, la résolution de l'équation différentielle précédente permet d'obtenir l'expression de sa vitesse $v(t)$:

$$v(t) = v_{\text{lim}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{avec } \tau = \frac{4 \cdot \rho_b \cdot \pi \cdot r^3}{3 \cdot \alpha \cdot \eta_C}$$

Q9. Calculer la valeur de τ en utilisant la valeur de la viscosité de référence de l'huile étudiée. Justifier que l'on peut considérer que la vitesse de la bille est pratiquement égale à sa valeur limite durant tout le mouvement sachant que le tube du viscosimètre a une hauteur d'environ 15 cm.

Corrigé

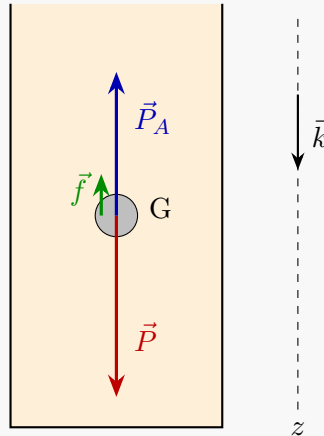
Q1. La valeur de la force de frottement est $f = \alpha \eta_C v$, d'où $\eta_C = \frac{f}{\alpha v}$. Une force s'exprime en newtons (N), α en mètres (m) et v en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$:

$$[\eta_C] = \frac{\text{N}}{\text{m} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}.$$

On remarque que $\text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{Pa}$: la viscosité s'exprime aussi en pascal-seconde ($\text{Pa} \cdot \text{s}$).

Q2. La valeur de la force de frottement, $f = \alpha \eta_C v$, est **proportionnelle** à la vitesse, α et η_C étant des constantes positives : quand la vitesse de la bille augmente, la valeur de la force de frottement **augmente** (elle double si la vitesse double). C'est ce qui permet à la bille d'atteindre une vitesse limite : le frottement croît jusqu'à compenser, avec la poussée d'Archimède, le poids.

Q3. *Système* : la bille, de centre de masse G. *Référentiel* : terrestre, supposé galiléen. *Bilan des forces* : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, vertical vers le bas (même sens que $\vec{k}$) ; la poussée d'Archimède $\vec{P}_A = -\rho_h V_b g \vec{k}$, verticale vers le haut ; la force de frottement $\vec{f} = -\alpha \eta_C v \vec{k}$, verticale vers le haut (opposée au mouvement). Lorsque la vitesse limite est atteinte, le mouvement est rectiligne uniforme : d'après la **première loi de Newton** (principe d'inertie), les forces se compensent, $\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = \vec{0}$. Le vecteur $\vec{P}$ a donc la même longueur que la somme des deux vecteurs $\vec{P}_A$ et $\vec{f}$ (sans calcul, on ne connaît pas la part respective de $\vec{P}_A$ et de $\vec{f}$; les données montreront que $P_A \approx 3,6 f$).



$$\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = \vec{0} : P = P_A + f$$

Q4. On projette la relation $\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = \vec{0}$ sur l'axe (Oz) orienté vers le bas, à la vitesse limite $v = v_{\text{lim}}$:

$$m g - \rho_h V_b g - \alpha \eta_C v_{\text{lim}} = 0.$$

La bille est homogène, donc $m = \rho_b V_b$, et l'on obtient $\alpha \eta_C v_{\text{lim}} = \rho_b V_b g - \rho_h V_b g = V_b g (\rho_b - \rho_h)$.

Avec $V_b = \frac{4}{3} \pi r^3$:

$$\alpha \cdot \eta_C \cdot v_{\text{lim}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot g \cdot (\rho_b - \rho_h)}{3}.$$

Q5. On isole la viscosité puis on convertit toutes les données en unités du système international ($r = 0,993 \times 10^{-3} \text{ m}$, $v_{\text{lim}} = 5,37 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) :

$$\eta_C = \frac{4 \pi r^3 g (\rho_b - \rho_h)}{3 \alpha v_{\text{lim}}} = \frac{4 \times \pi \times (0,993 \times 10^{-3})^3 \times 9,81 \times (1,06 \times 10^3 - 8,31 \times 10^2)}{3 \times 1,92 \times 10^{-2} \times 5,37 \times 10^{-3}}$$

Le numérateur vaut $4\pi \times 9,79 \times 10^{-10} \times 9,81 \times 229 = 2,76 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}$ (produit $\text{m}^3 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}$) et le dénominateur $3,09 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, d'où

$$\eta_C = 8,9 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s} = 0,089 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}.$$

Ce que le correcteur attend : le rayon en mètres (au cube!) et la vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; la différence $\rho_b - \rho_h = 229 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ne conserve que deux chiffres significatifs (le dernier chiffre de $\rho_b = 1,06 \times 10^3$ pèse $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ sur une différence de 229), ce qui limite le résultat à deux chiffres significatifs.

Q6. On calcule le quotient proposé dans les données :

$$\frac{|\eta_C - \eta_{\text{réf}}|}{u(\eta_C)} = \frac{|0,089 - 0,093|}{0,003} = \frac{0,004}{0,003} = 1,3.$$

Ce quotient est inférieur à 2 : l'écart entre la valeur mesurée et la valeur de référence est de l'ordre d'une fois l'incertitude-type, la mesure est **en accord** avec la valeur de référence. Le viscosimètre à chute de bille fournit donc une valeur fiable de la viscosité.

Q7. *Système* : la bille, de masse m . *Référentiel* : terrestre supposé galiléen. *Forces* : $\vec{P}$, $\vec{P}_A$ et $\vec{f}$ (question Q3). *Deuxième loi de Newton* : la masse étant constante, $\sum \vec{F} = m \vec{a}$, soit

$$m g \vec{k} - \rho_h V_b g \vec{k} - \alpha \eta_C v \vec{k} = m a \vec{k}.$$

En projetant sur l'axe (Oz) (c'est-à-dire en identifiant les coordonnées selon $\vec{k}$) et en divisant par m :

$$a = g - \frac{\rho_h V_b g}{m} - \frac{\alpha \eta_C}{m} v = g \left(1 - \frac{\rho_h V_b}{m} \right) - \frac{\alpha \eta_C}{m} v.$$

Le premier terme est l'accélération « effective » de la pesanteur, diminuée par la poussée d'Archimède; le second, proportionnel à v , freine la bille.

Q8. Par définition de l'accélération, $a = \frac{dv}{dt}$ (le mouvement est rectiligne selon (Oz)). On remplace $m = \rho_b V_b$ dans l'expression de Q7 : $\frac{\rho_h V_b}{m} = \frac{\rho_h}{\rho_b}$ et $\frac{\alpha \eta_C}{m} = \frac{\alpha \eta_C}{\rho_b V_b} = \frac{3 \alpha \eta_C}{4 \rho_b \pi r^3}$ puisque $V_b = \frac{4}{3} \pi r^3$. D'où

$$\frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho_b} \right) - \frac{3 \alpha \eta_C}{4 \rho_b \pi r^3} v \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{3 \cdot \alpha \cdot \eta_C}{4 \cdot \rho_b \cdot \pi \cdot r^3} \cdot v = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho_b} \right).$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, de la forme $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}$, dont la solution est bien celle donnée par l'énoncé; on vérifie que

$$v_{\text{lim}} = \tau g \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho_b} \right) = \frac{4 \pi r^3 g (\rho_b - \rho_h)}{3 \alpha \eta_C}, \text{ en accord avec Q4.}$$

Q9. Avec la viscosité de référence :

$$\tau = \frac{4 \rho_b \pi r^3}{3 \alpha \eta_{\text{réf}}} = \frac{4 \times 1,06 \times 10^3 \times \pi \times (0,993 \times 10^{-3})^3}{3 \times 1,92 \times 10^{-2} \times 0,093} = \frac{1,30 \times 10^{-5}}{5,36 \times 10^{-3}} = 2,4 \times 10^{-3} \text{ s}.$$

(Homogénéité : $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^3 / (\text{m} \times \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}) = \text{kg} / (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}) = \text{s}$.)

τ est la constante de temps du régime transitoire : d'après $v(t) = v_{\text{lim}}(1 - e^{-t/\tau})$, la vitesse atteint 63 % de v_{lim} à $t = \tau$ et 99 % à $t = 5\tau = 1,2 \times 10^{-2} \text{ s}$. Pendant ce régime transitoire, la vitesse reste inférieure à v_{lim} : la distance parcourue est donc inférieure à

$$d < v_{\text{lim}} \times 5\tau = 5,37 \times 10^{-3} \times 1,2 \times 10^{-2} = 6,5 \times 10^{-5} \text{ m} \approx 0,07 \text{ mm},$$

distance négligeable devant la hauteur du tube, $15 \text{ cm} = 150 \text{ mm}$ (rapport de l'ordre de 2000).

On peut le dire autrement : à la vitesse limite, la bille met $\frac{0,15}{5,37 \times 10^{-3}} = 28 \text{ s}$ pour descendre le tube, durée plus de deux mille fois supérieure à 5τ . La vitesse de la bille est donc pratiquement égale à v_{lim} durant tout le mouvement : mesurer la durée de chute sur une hauteur connue donne directement v_{lim} , donc la viscosité, ce qui est le principe du viscosimètre.

Ce que le correcteur attend : la valeur de τ en secondes avec les données en unités SI, le critère « 5τ » (ou « quelques τ ») pour la fin du régime transitoire, et une comparaison chiffrée avec la hauteur du tube (distance) ou avec la durée de la chute.