

Physique-chimie

Baccalauréat général 2026 — épreuve de spécialité

Métropole, mercredi 17 juin 2026 (26-PYCJ2ME1)

Corrigé

Trois exercices

Exercice 1

Sujet — Le kéfir de fruit — 9 points

Le kéfir de fruit est une boisson fermentée, naturellement pétillante et peu sucrée, obtenue par la fermentation à l'aide de grains de kéfir. Ces grains sont constitués de levures et de bactéries, micro-organismes responsables du processus de fermentation.

L'objectif de cet exercice est d'étudier différents paramètres de la préparation du kéfir susceptibles d'influencer ses caractéristiques gustatives, en particulier les paramètres liés à la fermentation.

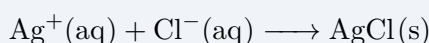
On peut trouver sur internet une recette permettant de produire 1 litre de kéfir de fruit :

- ingrédients : 20 g de grains de kéfir ; 20 g de sucre ; 2 tranches de citron ; 1 figue sèche ; quantité suffisante d'eau du robinet pour obtenir 1 L de boisson ;
- recette : introduire tous les ingrédients dans un grand bocal fermé ; laisser fermenter à température ambiante dans un endroit sec, à l'abri de la lumière, durant au moins 24 h.

1. Détermination de la concentration des ions chlorure présents dans l'eau du robinet La teneur en ions chlorure de l'eau du robinet doit être contrôlée car une concentration trop élevée détruit les bactéries, empêchant ainsi les transformations chimiques qui se produisent lors de la fermentation.

On réalise le titrage par conductimétrie d'un volume $V_1 = 250,0$ mL d'eau du robinet par une solution aqueuse de nitrate d'argent ($\text{Ag}^+(\text{aq})$; $\text{NO}_3^-(\text{aq})$) de concentration $C = 1,00 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

L'équation de réaction modélisant la transformation support de ce titrage est :



Données :

- masse molaire atomique du chlore : $M(\text{Cl}) = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- conductivités ioniques molaires à 25 °C de quelques ions : $\lambda(\text{Cl}^-) = 7,6 \text{ mS} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$;
 $\lambda(\text{NO}_3^-) = 7,1 \text{ mS} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$; $\lambda(\text{Ag}^+) = 6,2 \text{ mS} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$.

Q1. Schématiser le dispositif du titrage et légender le matériel et la verrerie, en identifiant clairement où se situent la solution titrante et la solution titrée.

On souhaite étudier l'évolution des quantités de matière des espèces Cl^- , Na^+ , et AgCl présentes dans le milieu au cours du titrage et prévoir l'allure de la courbe de titrage. Un programme en langage Python permet de simuler le titrage réalisé, en prenant une valeur de concentration de la solution titrée proche de celle attendue. Un extrait de ce programme est fourni sur la figure 1.

```
1 from pylab import *
2
3 C1=5E-4          # Concentration solution titrée en mol/L
```

```
4 V1=          # Volume de solution titrée en mL
5 C=           # Concentration solution titrante en mol/L
6 Vmax=25      # Volume maximal affiché en mL
7 VE=          # Calcul du volume à l'équivalence en mL
8
9 ### Listes des quantités de matière [initiale, à VE, à Vmax] (en mol)
10 ### Quantité de matière en ions argent (en mol)
11 ntitrant=[0,0,C*(Vmax-VE)*0.001]
12 ### Quantité de matière en ions chlorure (en mol)
13 ntitré=[C1*V1*0.001,0,0]
14 ### Quantité de matière en chlorure d'argent formé (en mol)
15 nproduit=
16
17 V=[0,VE,Vmax]
```

Figure 1. Extrait du programme en langage Python

Q2. Recopier sur la copie les lignes de code 4 et 5 et les compléter par une valeur numérique.

Q3. Recopier sur la copie la ligne de code 7 et la compléter par l'expression du volume à l'équivalence en fonction des données définies dans le programme Python.

Les lignes de code 11, 13 et 15 permettent de calculer les quantités de matière pour les espèces chimiques mentionnées sur la simulation. La ligne de code 15 donne les expressions des quantités de matière du chlorure d'argent formé pour trois volumes versés différents de solution titrante : $V = 0$; $V = V_E$ et $V = V_{max}$.

Q4. Recopier puis compléter la ligne 15 du programme sur la copie, en utilisant les paramètres C et VE , sur le même modèle que les lignes 11 et 13.

L'ion nitrate NO_3^- est une autre espèce ionique présente dans le milieu réactionnel : cette espèce ne participe pas à la transformation chimique mise en jeu.

Après exécution, le programme de simulation fournit la figure de l'**annexe 1 à rendre avec la copie** représentant l'évolution, au cours du titrage, des quantités de matière des espèces qui interviennent dans la réaction support du titrage : Ag^+ , Cl^- et AgCl .

Q5. Tracer sur la figure de l'**annexe 1 à rendre avec la copie** l'évolution de la quantité de matière des ions nitrate en fonction du volume V de solution titrante ajouté.

Q6. À l'aide des courbes fournies par le programme de simulation et présentées sur l'**annexe 1 à rendre avec la copie**, interpréter qualitativement l'évolution de la conductivité au cours du titrage.

Une fois le titrage réalisé, on trace l'évolution de la conductivité du mélange, notée σ , en fonction du volume V de solution titrante ajouté. On obtient les résultats expérimentaux fournis en figure 2.

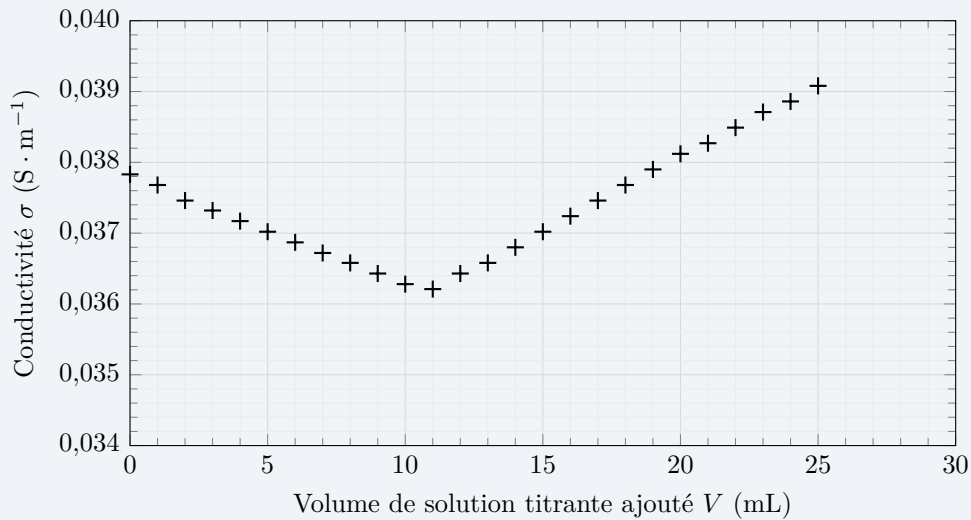


Figure 2. Suivi conductimétrique du titrage de l'eau du robinet

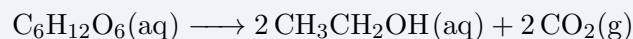
La teneur maximale en ions chlorure permettant l'activité fermentaire des bactéries contenues dans les grains de kéfir est de $2 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.

Q7. Déterminer la concentration en masse en ions chlorure de cette eau du robinet et conclure sur son utilisation pour réaliser du kéfir.

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter sa démarche même si elle n'a pas abouti. La démarche suivie est évaluée et nécessite donc d'être correctement présentée.

2. Évolution de la cinétique de la réaction de fermentation Lors du processus de fermentation, le glucose apporté par le sucre est transformé en éthanol et en dioxyde de carbone : le dégagement gazeux qui en résulte est responsable de l'aspect pétillant de cette boisson.

On se propose d'étudier la cinétique de cette fermentation, qu'on modélise par l'équation de réaction suivante :



Données : masse molaire moléculaire : $M(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6) = 180,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

La méthode étudiée consiste à suivre l'évolution de la concentration en éthanol au cours du temps dans le milieu réactionnel, à l'aide d'une sonde spécifique.

Pour cela, on prépare au laboratoire un litre de kéfir de fruit et on mesure la concentration en éthanol dissous dans le milieu réactionnel à l'aide d'une acquisition informatisée. La recette utilisée est celle proposée en début d'énoncé, les 20 g de sucre de la recette étant remplacés par 20 g de glucose. Pour la suite de l'exercice, on note V_{Boisson} le volume de boisson préparé.

Q8. Citer une autre méthode envisageable pour suivre la cinétique de cette réaction de fermentation.

Afin de suivre la cinétique de la réaction de fermentation par la méthode choisie, il est nécessaire de relier la concentration en glucose à la concentration d'éthanol dans le milieu réactionnel.

Q9. Montrer que l'évolution de la quantité de matière de glucose au cours du temps peut être définie à partir de la quantité de matière d'éthanol selon l'expression littérale :

$$n_{\text{glu}}(t) = n_{\text{glu}}(t_0) - \frac{C_{\text{éth}}(t) \cdot V_{\text{Boisson}}}{2}$$

où $n_{\text{glu}}(t)$ et $n_{\text{glu}}(t_0)$ sont les quantités de matière de glucose respectivement à la date t et à l'instant initial $t_0 = 0$ et $C_{\text{éth}}(t)$ est la concentration en quantité de matière d'éthanol à la date t . On pourra s'aider d'un tableau d'avancement.

On se propose de vérifier que l'évolution de la concentration en glucose suit une loi de vitesse d'ordre 1.

Q10. À partir de la définition de la vitesse de disparition du glucose et en supposant que cette vitesse suit une loi d'ordre 1, montrer que :

$$\frac{dC_{\text{glu}}(t)}{dt} + k \cdot C_{\text{glu}}(t) = 0$$

Q11. Justifier que cette équation différentielle admet pour solution une fonction d'expression :

$$C_{\text{glu}}(t) = C_{\text{glu}}(0) \cdot e^{-k \cdot t}$$

À partir des résultats expérimentaux, on trace l'évolution temporelle du logarithme népérien de la concentration en quantité de matière de glucose, en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le graphique obtenu est fourni en figure 3.

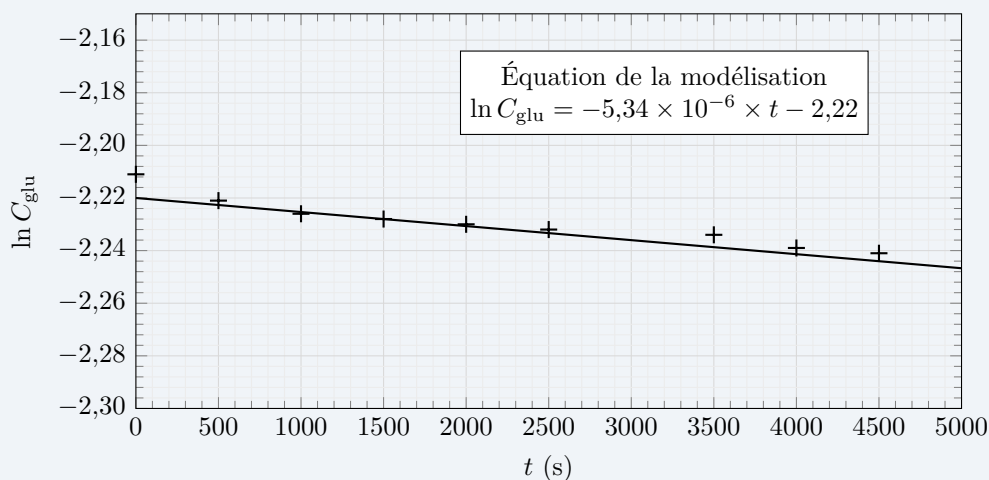


Figure 3. Évolution temporelle du logarithme népérien de la concentration en glucose

Q12. Justifier que ce tracé permet de confirmer que la vitesse de disparition du glucose lors de la fermentation suit bien une loi de vitesse d'ordre 1.

Q13. À partir de l'équation de la modélisation, calculer la masse de glucose initialement introduite pour réaliser cette expérience de fermentation. Commenter.

Le temps de demi-réaction peut se calculer à l'aide de l'expression suivante : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$.

Q14. Déterminer la valeur du temps de demi-réaction à l'aide des résultats expérimentaux. Conclure quant à la recette fournie en début d'énoncé, sachant que la boisson doit encore contenir du sucre pour être agréable au goût.

3. Arôme de la boisson végétale de kéfir La recette étudiée propose d'ajouter quelques tranches de citron pour donner un goût acidulé. Cet agrume contient dans son écorce des espèces chimiques telles que le limonène et le citral ; son jus est riche en acide citrique.

On se propose dans cette partie d'identifier les espèces présentes dans la boisson préparée et qui pourraient alors être responsables du goût acidulé de la boisson.

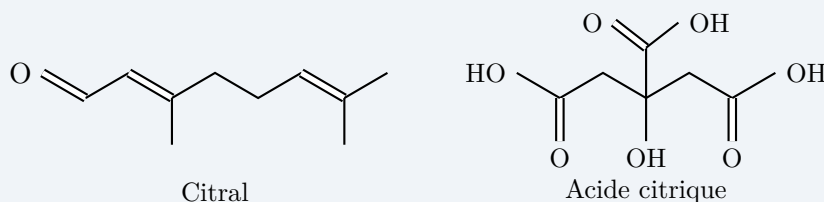


Figure 4. Formules topologiques du citral et de l'acide citrique

Données :

— données de spectroscopie infrarouge :

Liaison	O-H	C-H	C=C	C=O
Nombre d'onde (en cm^{-1})	3200 – 3700	2850 – 3100	1620 – 1680	1650 – 1730
Allure de la bande caractéristique	Forte et large	Forte	Faible et fine	Forte et fine

— données de solubilité de différents composés présents dans le citron :

Espèce chimique	Solubilité dans l'eau	Solubilité dans l'acétate d'éthyle	Solubilité dans le cyclohexane
Limonène	Faible	Convenable	Grande
Citral	Très faible	Convenable	Grande
Acide citrique	Grande	Grande	Nulle

— miscibilité des différents solvants avec l'eau :

acétate d'éthyle	cyclohexane
faible	nulle

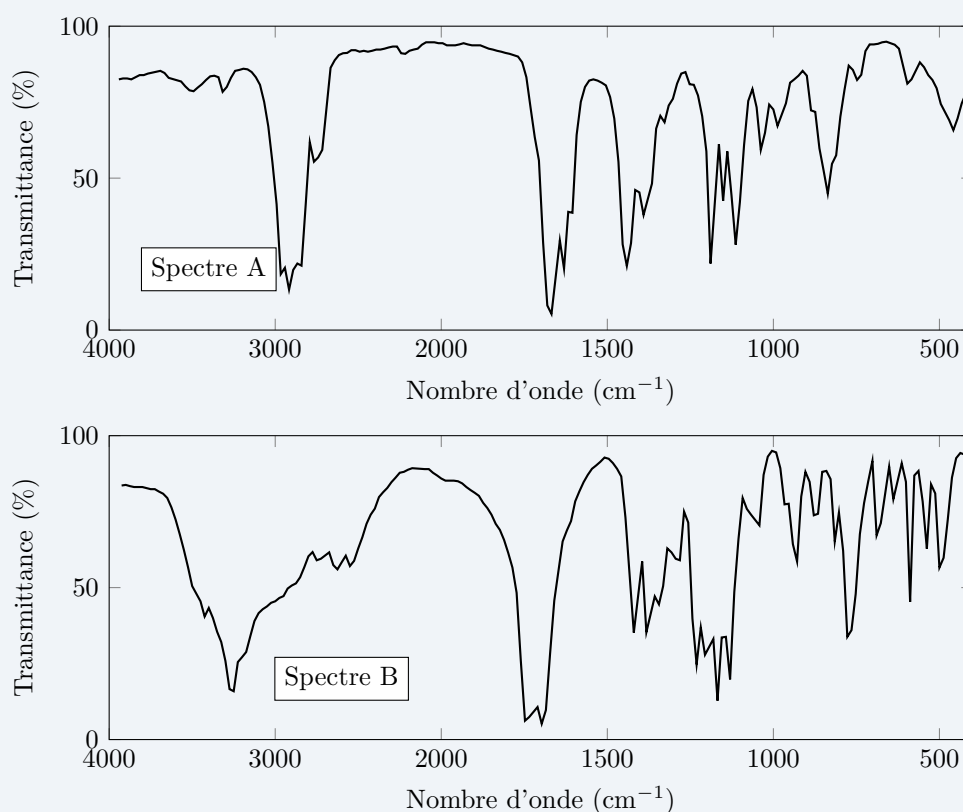


Figure 5. Spectres d'absorption de deux espèces présentes dans un citron (l'échelle des nombres d'onde est dilatée d'un facteur 2 en dessous de 2000 cm^{-1} , comme sur le sujet)

Q15. Attribuer chacun des deux spectres présentés au citral et à l'acide citrique. Justifier.

On souhaite identifier les espèces présentes dans le kéfir préparé. Pour cela, on réalise leur extraction à l'aide d'un solvant.

Q16. Choisir, en justifiant, parmi l'eau, l'acétate d'éthyle et le cyclohexane, le solvant le plus approprié pour extraire simultanément le citral, l'acide citrique et le limonène présents dans le kéfir.

Après l'extraction, on réalise une chromatographie sur couche mince pour analyser l'extrait, noté K. Après révélation avec une solution de permanganate de potassium, on obtient un chromatogramme dont une représentation est donnée en figure 6.

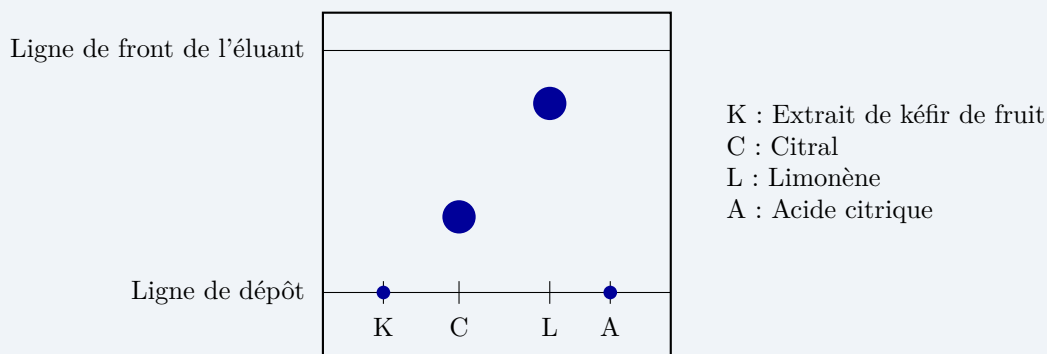
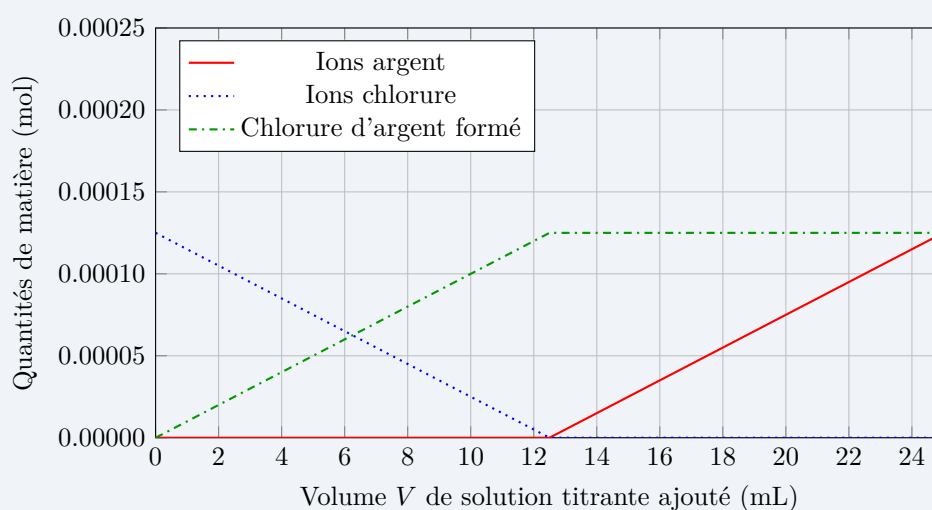


Figure 6. Schéma du chromatogramme obtenu

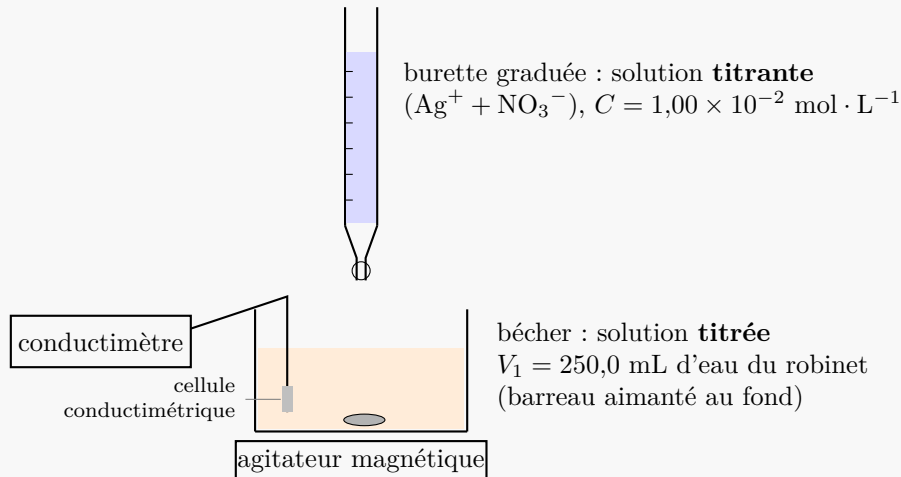
Q17. En analysant le chromatogramme obtenu, déterminer l'espèce issue du citron que l'on retrouve dans la boisson et qui pourrait être responsable du goût acidulé du kéfir.

Annexe 1 à rendre avec la copie Résultats obtenus après exécution du programme Python.



Corrigé

1. Détermination de la concentration des ions chlorure **Q1.** La solution *titrante* (nitrate d'argent, C connue) est dans la burette graduée ; la solution *titrée* ($V_1 = 250,0$ mL d'eau du robinet, mesurés à la fiole jaugée) est dans le bécher, sous agitation magnétique, avec la cellule du conductimètre plongée dedans.



Q2. Le volume titré est $V_1 = 250,0$ mL et la concentration titrante $C = 1,00 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, avec les unités annoncées en commentaire (mL et mol/L) :

V1=250	# Volume de solution titrée en mL
C=1E-2	# Concentration solution titrante en mol/L

Ce que le correcteur attend : 1E-2 (soit 0.01), pas 1E2, et V_1 en mL comme le demande le commentaire.

Q3. À l'équivalence, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques de la réaction support (stœchiométrie 1 :1) : $n(\text{Ag}^+)_{\text{versé}} = n(\text{Cl}^-)_{\text{initial}}$, soit $C V_E = C_1 V_1$, d'où

$$V_E = \frac{C_1 V_1}{C} \quad (\text{en mL si } V_1 \text{ est en mL}).$$

VE=C1*V1/C	# Calcul du volume à l'équivalence en mL
------------	--

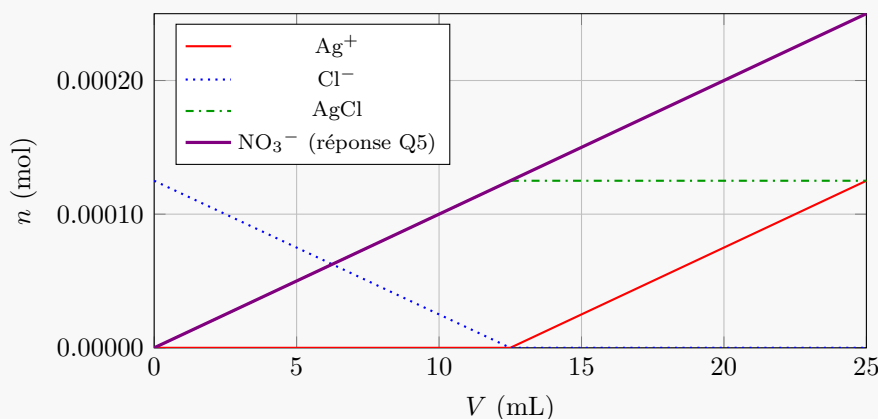
Avec les valeurs du programme, $V_E = \frac{5 \times 10^{-4} \times 250}{1 \times 10^{-2}} = 12,5$ mL : c'est bien l'abscisse de la rupture des courbes de l'annexe.

Q4. Pour $V = 0$, aucun précipité n'est encore formé. Avant l'équivalence, Ag^+ est limitant : chaque ion argent versé forme un AgCl , donc $n(\text{AgCl}) = C V \times 10^{-3}$; à $V = V_E$, $n(\text{AgCl}) = C V_E \times 10^{-3}$ ($= C_1 V_1 \times 10^{-3}$, tous les ions chlorure ont précipité). Au-delà, il n'y a plus d'ions chlorure : la quantité de précipité reste égale à cette valeur.

nproduit=[0,C*VE*0.001,C*VE*0.001]

Ce que le correcteur attend : le facteur 0.001 qui convertit les mL en L, comme aux lignes 11 et 13.

Q5. L'ion nitrate est spectateur : il s'accumule au fur et à mesure des ajouts, $n(\text{NO}_3^-) = C V \times 10^{-3}$, fonction linéaire de V (droite passant par l'origine, pente $1,00 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{mL}^{-1}$), qui atteint $1,25 \times 10^{-4} \text{ mol}$ en $V_E = 12,5$ mL et $2,50 \times 10^{-4} \text{ mol}$ en $V = 25$ mL.

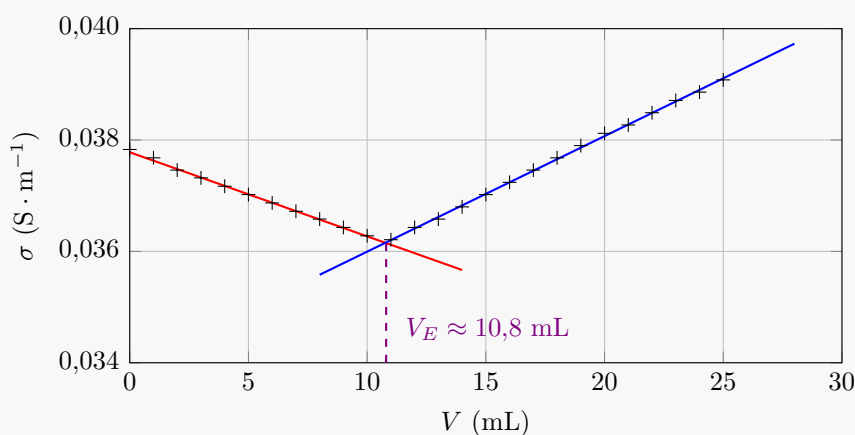


Q6. D'après la loi de Kohlrausch, $\sigma = \sum_i \lambda_i [X_i]$: la conductivité dépend de la nature et de la concentration des ions présents (on néglige la dilution, $V \ll V_1$).

- *Avant l'équivalence* ($V < V_E$) : chaque ion Ag^+ versé disparaît aussitôt en précipitant un ion Cl^- (courbe bleue décroissante, courbe rouge nulle), tandis que l'ion NO_3^- qui l'accompagne reste en solution. Tout se passe comme si un ion Cl^- ($\lambda = 7,6$) était remplacé par un ion NO_3^- ($\lambda = 7,1 \text{ mS} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$), légèrement moins conducteur : σ **diminue faiblement**.
- *Après l'équivalence* ($V > V_E$) : il n'y a plus d'ions chlorure ; les ions Ag^+ (courbe rouge croissante) et NO_3^- versés s'accumulent sans réagir et apportent $\lambda(\text{Ag}^+) + \lambda(\text{NO}_3^-) = 13,3 \text{ mS} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$ par mole versée : σ **augmente nettement**.

La courbe $\sigma = f(V)$ est donc formée de deux segments de droite, une pente faiblement négative puis une pente positive plus forte ; la **rupture de pente** repère V_E . C'est bien l'allure de la figure 2.

Q7. Démarche. On modélise chaque portion de la figure 2 par une droite (en écartant les points proches de l'équivalence, où la courbe s'arrondit), et on lit l'abscisse de leur intersection.



Droite avant l'équivalence (points de 0 à 10 mL) : $\sigma \approx 0,0378 - 1,5 \times 10^{-4} V$; droite après (points de 12 à 25 mL) : $\sigma \approx 0,0339 + 2,1 \times 10^{-4} V$. Leur intersection donne $V_E \approx 10,8 \text{ mL}$ (une lecture entre 10,5 et 11 mL est acceptable).

Relation à l'équivalence (stoechiométrie 1 : 1) : $C_1 V_1 = C V_E$, donc

$$C_1 = \frac{C V_E}{V_1} = \frac{1,00 \times 10^{-2} \times 10,8}{250,0} = 4,3 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

Concentration en masse : $C_m = C_1 M(\text{Cl}) = 4,3 \times 10^{-4} \times 35,5 = 1,5 \times 10^{-2} \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$, soit environ $15 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ (ordre de grandeur habituel d'une eau du robinet).

Conclusion : $1,5 \times 10^{-2} \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} \ll 2 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ (plus de cent fois moins que la teneur maximale) : cette eau du robinet convient pour réaliser du kéfir, et l'incertitude de lecture sur V_E (quelques pour cent) ne change pas la conclusion. On note enfin que la valeur simulée $C_1 = 5 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ était bien « proche de celle attendue ».

Ce que le correcteur attend : la relation à l'équivalence écrite avant tout calcul, V_E et V_1 dans la même unité, le passage $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \rightarrow \text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ par $M(\text{Cl})$ et une conclusion explicite.

2. Cinétique de la fermentation Q8. La réaction produit un gaz, CO_2 : on peut suivre la cinétique par une **mesure de pression** (capteur de pression dans une enceinte fermée, loi des gaz parfaits $n = PV/RT$), ou par **pesée** du bocal ouvert (la masse diminue à mesure que le CO_2 s'échappe), ou encore en mesurant le volume de gaz dégagé recueilli sur une éprouvette retournée. Un titrage du glucose sur des prélèvements trempés est aussi possible, mais destructif et discontinu.

Q9. Tableau d'avancement (volume constant, pas d'éthanol à t_0) :

	$\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$	$2 \text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$	2CO_2
état initial ($x = 0$)	$n_{\text{glu}}(t_0)$	0	0
à la date t (avancement x)	$n_{\text{glu}}(t_0) - x$	$2x$	$2x$

La quantité d'éthanol à la date t vaut $n_{\text{éth}}(t) = 2x = C_{\text{éth}}(t) V_{\text{Boisson}}$, d'où $x = \frac{C_{\text{éth}}(t) V_{\text{Boisson}}}{2}$, et

$$n_{\text{glu}}(t) = n_{\text{glu}}(t_0) - x = n_{\text{glu}}(t_0) - \frac{C_{\text{éth}}(t) V_{\text{Boisson}}}{2}.$$

Q10. Par définition, la vitesse volumique de disparition du glucose est $v_{\text{disp}} = -\frac{dC_{\text{glu}}(t)}{dt}$ (positive, car C_{glu} décroît). Une loi de vitesse d'ordre 1 signifie que cette vitesse est proportionnelle à la concentration du réactif : $v_{\text{disp}} = k C_{\text{glu}}(t)$, avec $k > 0$ la constante de vitesse (en s^{-1}). En égalant :

$$-\frac{dC_{\text{glu}}(t)}{dt} = k C_{\text{glu}}(t) \iff \frac{dC_{\text{glu}}(t)}{dt} + k C_{\text{glu}}(t) = 0.$$

Q11. On vérifie que la fonction proposée satisfait l'équation et la condition initiale. Sa dérivée vaut

$$\frac{d}{dt} \left(C_{\text{glu}}(0) e^{-kt} \right) = -k C_{\text{glu}}(0) e^{-kt} = -k C_{\text{glu}}(t),$$

donc $\frac{dC_{\text{glu}}}{dt} + k C_{\text{glu}} = -k C_{\text{glu}} + k C_{\text{glu}} = 0$: l'équation est vérifiée. À $t = 0$, $e^0 = 1$ et la fonction vaut bien $C_{\text{glu}}(0)$. C'est la décroissance exponentielle caractéristique de l'ordre 1.

Q12. En prenant le logarithme népérien de la solution : $\ln C_{\text{glu}}(t) = \ln C_{\text{glu}}(0) - kt$. Si la loi est d'ordre 1, $\ln C_{\text{glu}}$ est une *fonction affine* du temps, de coefficient directeur $-k$ et d'ordonnée à l'origine $\ln C_{\text{glu}}(0)$. Sur la figure 3, les points expérimentaux sont alignés (écarts à la droite inférieurs à 0,01 — le point à $t = 0$ est le plus éloigné, d'environ 0,009 —, sans courbure systématique) et modélisés par $\ln C_{\text{glu}} = -5,34 \times 10^{-6} t - 2,22$: l'ordre 1 est confirmé, avec $k = 5,34 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$.

Q13. L'ordonnée à l'origine de la modélisation donne $\ln C_{\text{glu}}(0) = -2,22$, soit

$$C_{\text{glu}}(0) = e^{-2,22} = 0,1086 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \approx 0,109 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

Avec $V_{\text{Boisson}} = 1,00 \text{ L}$ (un litre de kéfir préparé) : $n_{\text{glu}}(0) = C_{\text{glu}}(0) V_{\text{Boisson}} = 0,1086 \text{ mol}$, puis

$$m_{\text{glu}} = n_{\text{glu}}(0) M(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6) = e^{-2,22} \times 1,00 \times 180,0 = 19,5 \text{ g} \approx 20 \text{ g}$$

(on garde la valeur non arrondie de $C_{\text{glu}}(0)$ dans le calcul ; avec $0,109 \times 180,0$ on obtiendrait 19,6 g, ce qui ne change pas la conclusion). *Commentaire* : on retrouve, à 2 % près, les 20 g de glucose de la recette. L'écart est compatible avec la précision de l'ordonnée à l'origine ($-2,22$ à $\pm 0,005$ près donne 19,4 à 19,6 g) et avec la fermentation déjà amorcée entre l'introduction du glucose et le début de l'acquisition. *Ce que le correcteur attend* : $C_{\text{glu}}(0) = e^{-2,22}$ (et non $-2,22$ ou $10^{-2,22}$) et le volume de 1 L.

Q14. D'après la modélisation, $k = 5,34 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, donc

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0,693}{5,34 \times 10^{-6}} = 1,30 \times 10^5 \text{ s} \approx 36 \text{ h},$$

soit un jour et demi : il faut 36 h pour que la moitié du glucose soit consommée (et $t_{1/2}$ ne dépend pas de la concentration initiale, propriété de l'ordre 1).

Conclusion sur la recette : après les 24 h de fermentation prescrites ($24 \text{ h} = 8,64 \times 10^4 \text{ s} < t_{1/2}$), il reste $\frac{C_{\text{glu}}}{C_{\text{glu}}(0)} = e^{-kt} = e^{-5,34 \times 10^{-6} \times 8,64 \times 10^4} = 0,63$, soit 63 % du sucre (environ 13 g sur 20 g) : la boisson est encore sucrée, la recette est cohérente. Mais « au moins 24 h » ne fixe pas de durée maximale : après 36 h il ne reste que la moitié du sucre, après 3 jours un quart, après une semaine ($\approx 5 t_{1/2}$) presque plus rien. Pour garder un goût agréable, il faut arrêter la fermentation après un à deux jours, par exemple en plaçant la boisson au réfrigérateur (la température est un facteur cinétique).

3. Arôme de la boisson **Q15.** Le **spectre B** présente une bande forte et large entre 2500 et 3500 cm^{-1} , caractéristique de liaisons O–H (ici d'acide carboxylique et d'alcool), ainsi qu'une bande forte et fine vers 1700–1740 cm^{-1} (C=O d'acide carboxylique) : c'est l'**acide citrique**, qui possède quatre groupes O–H et trois C=O. Le **spectre A** ne présente aucune bande large au-delà de 3200 cm^{-1} (pas de liaison O–H), mais une bande forte des C–H vers 2850–3000 cm^{-1} , une bande forte et fine vers 1680 cm^{-1} (C=O d'aldéhyde conjugué) et la bande faible des C=C vers 1620–1680 cm^{-1} : c'est le **citral**, aldéhyde à deux doubles liaisons C=C, sans groupe hydroxyle.

Q16. Le kéfir est une solution aqueuse. Pour une extraction liquide-liquide, le solvant extracteur doit être *non miscible* (ou très peu) avec l'eau, afin d'obtenir deux phases séparables à l'ampoule à décanter, et doit *dissoudre les trois espèces* mieux que l'eau.

- L'eau est exclue : c'est déjà le solvant de la boisson, et le citral et le limonène y sont très peu solubles.
- Le *cyclohexane* n'est pas miscible à l'eau et dissout très bien le citral et le limonène, mais la solubilité de l'acide citrique y est nulle : il n'extrairait pas l'acide citrique.
- L'*acétate d'éthyle* est faiblement miscible à l'eau (deux phases) et dissout convenablement le citral et le limonène et bien l'acide citrique.

Le solvant le plus approprié pour extraire simultanément les trois espèces est donc l'**acétate d'éthyle**.

Q17. Dans les mêmes conditions d'élution, une espèce migre toujours à la même hauteur (même rapport frontal). L'extrait K ne présente qu'une seule tache, située sur la ligne de dépôt, à la même hauteur que la tache de la référence A (acide citrique, espèce très polaire, non entraînée par l'éluant). Aucune tache n'apparaît aux hauteurs des références C (citral, à mi-hauteur) et L (limonène, près du front) : ces deux espèces de l'écorce, très peu solubles dans l'eau, ne sont pas passées dans la boisson en quantité détectable. L'espèce du citron retrouvée dans le kéfir est donc l'**acide citrique**, triacide carboxylique dont les groupes COOH libèrent des ions H_3O^+ dans l'eau : c'est lui qui peut être responsable du goût acidulé de la boisson.

Exercice 2

Sujet — La yaourtière — 5,5 points

La préparation de yaourt « maison » à partir de lait est une pratique de plus en plus courante. Cette préparation repose sur une prise en masse progressive du lait sous l'action de ferments lactiques pendant environ 8 heures, à la température de 43 °C, qui est maintenue automatiquement dans la yaourtière. Il faut encore attendre 2 heures pour que les yaourts ainsi préparés refroidissent, à l'air libre puis au réfrigérateur.

Les objectifs de cet exercice sont d'étudier quelques aspects de la fabrication d'un yaourt maison, d'estimer son coût puis de modéliser l'étape finale de refroidissement des yaourts dans le réfrigérateur.

1. Fabrication des yaourts dans la yaourtière Certains ferments lactiques utilisés pour la fabrication des yaourts maison contiennent des bactéries alimentaires qui présentent un optimum de croissance à la température de 43 °C.

La yaourtière utilisée permet la préparation de 7 yaourts. On utilise la recette suivante :

- verser 700 mL de lait à la température ambiante dans un récipient ;
- ajouter un sachet de 2 g de ferments lactiques puis mélanger ;
- répartir la préparation dans les 7 pots en verre de la yaourtière et les fermer à l'aide d'un couvercle ;
- phase de chauffage : mettre les 7 pots dans la yaourtière, fermer la yaourtière, la démarrer et la faire fonctionner pendant 8 heures ;
- phase de refroidissement : laisser refroidir les pots puis les mettre au réfrigérateur pendant 2 heures.

Afin d'effectuer des bilans d'énergie, on définit le système étudié, noté $\{S\}$, constitué de la yaourtière contenant les 7 pots en verre fermés et remplis. On admet que tous les composants du système $\{S\}$ sont à la même température.

Lors de la phase de chauffage de 8 heures, il est possible de distinguer deux étapes :

- étape A : chauffage du système $\{S\}$ de la température ambiante à la température de 43 °C pendant une durée Δt_A ;
- étape B : maintien en continu du système $\{S\}$ à la température de 43 °C pendant une durée Δt_B .

Données :

- conversion d'une énergie en wattheure (Wh) en une énergie en joule (J) : 1 kWh = 3 600 kJ ;
- puissance électrique moyenne consommée par la yaourtière durant l'étape A : $P_A = 150$ W ;
- puissance électrique moyenne consommée par la yaourtière durant l'étape B : $P_B = 20$ W ;

- estimation de la capacité thermique du système $\{S\}$: $C = 4,0 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$;
- température de fabrication d'un yaourt : $\theta_{\text{fab}} = 43 \text{ }^\circ\text{C}$;
- température de l'air ambiant : $\theta_{\text{amb}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Q1. Montrer que la valeur de l'énergie thermique $Q_{\text{chauffage}}$ qui doit être transférée au système $\{S\}$ lors de l'étape A est voisine de $9,2 \times 10^4 \text{ J}$.

Q2. Calculer la durée Δt_A de l'étape A, en supposant que, pendant cette étape, 85 % de l'énergie électrique consommée par la yaourtière est fournie par transfert thermique au système $\{S\}$. En déduire que la durée Δt_B de l'étape B est de l'ordre de 7 heures et 50 minutes.

Un des arguments souvent avancés qui encouragent à faire ses yaourts soi-même est le prix : à qualité égale, ils coûteraient moins cher que ceux achetés directement dans la grande distribution.

On donne des coûts approximatifs ci-dessous :

1 kWh électrique	1 L de lait	2 g de ferments lactiques	1 pot de yaourt nature de grande distribution et de qualité comparable à celui fait maison
0,20 €	1,05 €	0,64 €	0,35 €

Q3. Estimer le prix de fabrication d'un yaourt fait maison. Discuter si l'argument lié au coût des yaourts maison est vérifié.

2. Refroidissement des yaourts dans le réfrigérateur Dans cette partie, on étudie le refroidissement d'un seul pot de yaourt.

Après avoir passé 8 h dans la yaourtière, le pot de yaourt, avec son couvercle, est d'abord refroidi à l'air jusqu'à atteindre la température de $30 \text{ }^\circ\text{C}$. On étudie dans cette partie la seconde phase de refroidissement à partir de l'instant initial où le pot de yaourt est placé dans le réfrigérateur.

Le système d'étude est noté $\{P\}$; il comprend le pot en verre, le couvercle et le yaourt qu'il contient. On admet que tous ses composants sont à la même température.

Données :

- loi de Newton donnant l'expression du flux thermique Φ , en watt, cédé par le système $\{P\}$ de température θ , en contact avec l'air intérieur du réfrigérateur de température $\theta_{\text{réfri}}$:

$$\Phi = h \cdot S \cdot (\theta - \theta_{\text{réfri}})$$

avec : h , coefficient de transfert thermique surfacique : $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$; S , surface d'échange entre l'air de l'intérieur du réfrigérateur et le système $\{P\}$: $S = 0,019 \text{ m}^2$;

- masse du système $\{P\}$: $m = 0,19 \text{ kg}$;
- température, considérée constante, de l'intérieur du réfrigérateur : $\theta_{\text{réfri}} = 4,0 \text{ }^\circ\text{C}$;
- température initiale du système $\{P\}$: $\theta_0 = 30 \text{ }^\circ\text{C}$;
- capacité thermique massique du système $\{P\}$: $c_Y = 2,5 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Q4. Nommer les trois modes de transfert thermique permettant le refroidissement du système $\{P\}$.

Q5. Calculer la valeur du flux thermique initial Φ_0 cédé par le système $\{P\}$ à l'instant initial $t = 0$ et indiquer, en justifiant, comment varie le flux thermique au cours du temps.

Q6. Indiquer la température du système $\{P\}$ après un temps très long. Montrer que la valeur de l'énergie thermique perdue par le système $\{P\}$ durant la phase de refroidissement est voisine de 12 kJ .

Q7. Calculer la durée Δt_0 qui serait nécessaire pour effectuer un transfert thermique de 12 kJ à la puissance Φ_0 .

En tenant compte de la variation du flux thermique au cours du temps, on montre que l'évolution de la température du système {P} peut être modélisée par la fonction :

$$\theta(t) = (\theta_0 - \theta_{\text{réfri}}) e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{\text{réfri}} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{m c_Y}{h S}$$

Q8. Tracer l'allure de l'évolution de la température θ en fonction du temps en indiquant les températures initiale et finale ; faire apparaître une méthode graphique de détermination du temps caractéristique τ .

Q9. Comparer la valeur de τ à celle de Δt_0 obtenue en **Q7**. Commenter.

Corrigé

1. Fabrication des yaourts dans la yaourtière **Q1.** Système {S} (yaourtière et sept pots pleins), de capacité thermique C . Pendant l'étape A, il ne reçoit aucun travail ($W = 0$) et sa température passe de θ_{amb} à θ_{fab} . D'après le *premier principe de la thermodynamique*, $\Delta U = W + Q = Q_{\text{chauffage}}$, et pour une phase condensée $\Delta U = C \Delta \theta$:

$$Q_{\text{chauffage}} = C (\theta_{\text{fab}} - \theta_{\text{amb}}) = 4,0 \times 10^3 \times (43 - 20) = 9,2 \times 10^4 \text{ J.}$$

Un écart de température a la même valeur en kelvins et en degrés Celsius ($\Delta T = 23 \text{ K}$) : on trouve bien $Q_{\text{chauffage}} \approx 9,2 \times 10^4 \text{ J}$, soit 92 kJ, positif car reçu par {S}.

Q2. Pendant Δt_A , la yaourtière consomme l'énergie électrique $E_A = P_A \Delta t_A$, dont 85 % est transférée à {S} : $Q_{\text{chauffage}} = 0,85 P_A \Delta t_A$, d'où

$$\Delta t_A = \frac{Q_{\text{chauffage}}}{0,85 P_A} = \frac{9,2 \times 10^4}{0,85 \times 150} = 7,2 \times 10^2 \text{ s} = 12 \text{ min.}$$

La phase de chauffage dure 8 h au total, donc $\Delta t_B = 8 \text{ h} - \Delta t_A = 480 - 12 = 468 \text{ min} = 7 \text{ h } 48 \text{ min}$, soit bien de l'ordre de 7 h 50 min : l'essentiel du fonctionnement est le maintien en température.

Ce que le correcteur attend : le rendement 0,85 au dénominateur (l'énergie électrique consommée est *supérieure* à l'énergie thermique utile), et le résultat en secondes converti en minutes.

Q3. *Énergie électrique consommée pour une journée de 7 yaourts.*

$$E_A = P_A \Delta t_A = 150 \times 7,2 \times 10^2 = 1,1 \times 10^5 \text{ J} ; \quad E_B = P_B \Delta t_B = 20 \times 468 \times 60 = 5,6 \times 10^5 \text{ J.}$$

Total $E = 6,7 \times 10^5 \text{ J}$, soit, avec $1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$: $E = \frac{6,7 \times 10^5}{3,6 \times 10^6} = 0,19 \text{ kWh}$ (on retrouve directement $150 \text{ W} \times 0,2 \text{ h} + 20 \text{ W} \times 7,8 \text{ h} \approx 186 \text{ Wh}$).

Coût de la journée.

- électricité : $0,19 \times 0,20 = 0,04 \text{ €}$;
- lait : $0,700 \times 1,05 = 0,74 \text{ €}$;
- ferments : 0,64 €.

Total : $0,04 + 0,74 + 0,64 = 1,42 \text{ €}$ pour 7 yaourts, soit environ $\frac{1,42}{7} = 0,20 \text{ €}$ par yaourt maison.

Discussion. Un yaourt de qualité comparable coûte 0,35 € en grande distribution : le yaourt maison revient environ 40 % moins cher (économie de 0,15 € par pot), l'électricité ne pesant presque rien (moins de 1 centime par pot) et les ferments représentant près de la moitié du coût. L'argument est donc vérifié, avec des réserves : l'estimation ne compte ni l'achat de la yaourtière (amortie seulement après plusieurs centaines de yaourts), ni le temps passé, ni les pertes éventuelles ; à l'inverse, réutiliser un yaourt comme ferment réduirait encore le coût.

2. Refroidissement des yaourts dans le réfrigérateur **Q4.** Le pot cède de l'énergie à l'air du réfrigérateur par les trois modes de transfert thermique : la **conduction** (de proche en proche, du yaourt vers le verre puis vers l'air au contact de la paroi, sans déplacement de matière), la **convection** (l'air froid en contact avec le pot se réchauffe, s'élève et est remplacé par de l'air plus froid : transport d'énergie par mouvement du fluide) et le **rayonnement** (émission d'ondes électromagnétiques infrarouges par la surface du pot, sans support matériel). **Q5.** D'après la loi de Newton, à $t = 0$ le pot est à $\theta_0 = 30\text{ °C}$:

$$\Phi_0 = h S (\theta_0 - \theta_{\text{réfri}}) = 10 \times 0,019 \times (30 - 4,0) = 4,9\text{ W}.$$

Le pot cède de l'énergie, donc sa température $\theta(t)$ diminue et se rapproche de $\theta_{\text{réfri}}$ (constante) : l'écart $\theta - \theta_{\text{réfri}}$ décroît, et comme Φ lui est proportionnel, **le flux thermique diminue au cours du temps**, de $\Phi_0 = 4,9\text{ W}$ jusqu'à s'annuler à l'équilibre thermique.

Q6. Après un temps très long, l'équilibre thermique est atteint : le pot est à la température de l'air du réfrigérateur, $\theta_\infty = \theta_{\text{réfri}} = 4,0\text{ °C}$ (le flux est alors nul).

Premier principe appliqué à $\{P\}$ entre l'état initial (θ_0) et l'état final ($\theta_{\text{réfri}}$), sans travail échangé : $\Delta U = Q = m c_Y (\theta_{\text{réfri}} - \theta_0)$, soit

$$Q = 0,19 \times 2,5 \times 10^3 \times (4,0 - 30) = -1,2 \times 10^4\text{ J}.$$

$Q < 0$: le système *cède* de l'énergie ; l'énergie thermique perdue vaut $|Q| = 1,2 \times 10^4\text{ J} \approx 12\text{ kJ}$ (valeur non arrondie : 12,35 kJ). *Ce que le correcteur attend* : le signe négatif de Q commenté, pas seulement une valeur absolue.

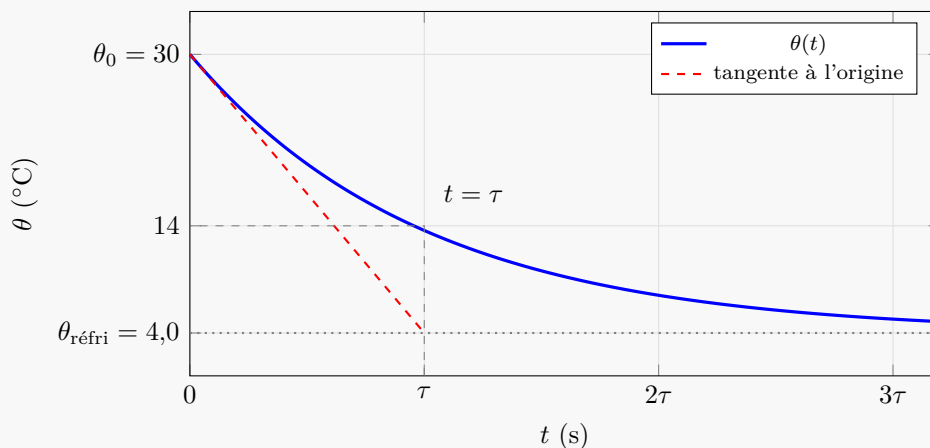
Q7. Si le flux restait égal à Φ_0 , le transfert de 12 kJ durerait

$$\Delta t_0 = \frac{|Q|}{\Phi_0} = \frac{12 \times 10^3}{4,9} = 2,4 \times 10^3\text{ s} \approx 40\text{ min}$$

(avec la valeur non arrondie 12,35 kJ et $\Phi_0 = 4,94\text{ W}$: $\Delta t_0 = 2,5 \times 10^3\text{ s} \approx 42\text{ min}$). En réalité le flux diminue (Q5), donc le refroidissement réel est plus long.

Q8. La température décroît exponentiellement de $\theta_0 = 30\text{ °C}$ vers l'asymptote horizontale $\theta_{\text{réfri}} = 4,0\text{ °C}$, la décroissance étant d'abord rapide (flux maximal) puis de plus en plus lente. Deux méthodes graphiques pour τ :

- la *tangente à l'origine* coupe l'asymptote $\theta = \theta_{\text{réfri}}$ à la date $t = \tau$ (car $\theta'(0) = -(\theta_0 - \theta_{\text{réfri}})/\tau$) ;
- à $t = \tau$, l'écart initial a été réduit de 63 % : $\theta(\tau) = \theta_{\text{réfri}} + 0,37(\theta_0 - \theta_{\text{réfri}}) = 4,0 + 0,37 \times 26 \approx 14\text{ °C}$; on lit τ en abscisse du point de la courbe d'ordonnée 14 °C.



Q9. Le temps caractéristique vaut

$$\tau = \frac{m c_Y}{h S} = \frac{0,19 \times 2,5 \times 10^3}{10 \times 0,019} = 2,5 \times 10^3 \text{ s} \approx 42 \text{ min.}$$

Aux arrondis près ($\Delta t_0 = 2,4 \times 10^3$ s avec les valeurs arrondies de Q6 et Q5, $2,5 \times 10^3$ s avec les valeurs exactes), on trouve $\Delta t_0 = \tau$. Ce n'est pas un hasard, l'égalité est exacte : $\Delta t_0 = \frac{|Q|}{\Phi_0} = \frac{m c_Y (\theta_0 - \theta_{\text{réfri}})}{h S (\theta_0 - \theta_{\text{réfri}})} = \frac{m c_Y}{h S} = \tau$. Le temps caractéristique est exactement la durée qu'aurait le refroidissement complet si le flux restait égal à sa valeur initiale : c'est la signification physique de la méthode de la tangente à l'origine (Q8). Comme le flux décroît, le refroidissement réel est plus long : après τ il reste 37 % de l'écart, après $3\tau \approx 2$ h il n'en reste que 5 % ($\theta(7200 \text{ s}) = 26 e^{-2,9} + 4,0 \approx 5,5$ °C), et l'équilibre est pratiquement atteint au bout de $5\tau \approx 3,5$ h. Les 2 heures de réfrigération de la recette correspondent donc à environ 3τ : le yaourt est alors à moins de 6 °C, ce qui est cohérent.

Exercice 3

Sujet — Le satellite TESS — 5,5 points

Les exoplanètes sont des planètes en orbite autour d'une étoile autre que le Soleil. Les physiciens Michel Mayor et Didier Queloz ont reçu en 2019 le prix Nobel de physique pour la première détection d'une exoplanète.

Le satellite TESS « Transiting Exoplanet Survey Satellite » est à la recherche de nouvelles exoplanètes depuis le 18 avril 2018. En juillet 2019, le satellite TESS a permis la découverte du système planétaire « TOI 270 », composé entre autres de deux exoplanètes, que l'on appellera exoplanète 1 et exoplanète 2, en orbite autour de l'étoile E. (*D'après sciencesetavenir.fr*)

L'objectif de cet exercice est d'étudier le système planétaire « TOI 270 » pour lequel on supposera que les mouvements des exoplanètes 1 et 2 autour de l'étoile E sont circulaires uniformes. L'interaction entre les deux exoplanètes est négligée.

Données :

- constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$;
- approximations dans le cas de petits angles ($\alpha \ll 1 \text{ rad}$) : $\sin \alpha = \alpha$; $\tan \alpha = \alpha$;
- données relatives au système « TOI 270 » :

Objet	Étoile E	Exoplanète 1	Exoplanète 2
Rayon de l'orbite autour de E en km		$R_1 = 6,77 \times 10^6$	$R_2 = 1,08 \times 10^7$
Période de révolution autour de E en jours terrestres		T_1	$T_2 = 11,4$
Rayon de l'objet en km	$r_E = 2,63 \times 10^5$	r_1	
Masse de l'objet en kg	$M_E = 7,68 \times 10^{29}$		M_2

1. Étude du système « TOI 270 » On étudie le mouvement de l'exoplanète 2, de masse M_2 , en orbite circulaire autour de l'étoile E. L'étude est conduite dans un référentiel dont l'origine est prise au centre de l'étoile E et dont les axes pointent vers des étoiles lointaines ; il est supposé galiléen. On travaille dans le repère de Frenet ($P, \vec{u}_T, \vec{u}_N$).

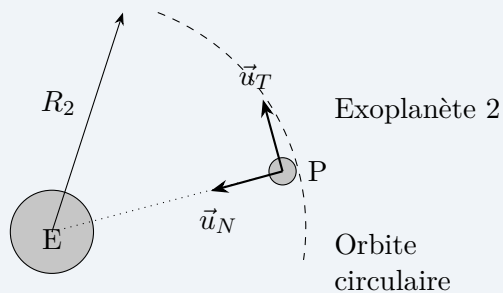


Figure 1. Trajectoire de l'exoplanète 2 autour de l'étoile E

Q1. Exprimer la force d'attraction gravitationnelle, notée $\vec{F}$, exercée par l'étoile E sur l'exoplanète 2, en fonction de M_2 , M_E , G , R_2 et $\vec{u}_N$.

Q2. En utilisant la deuxième loi de Newton, établir l'expression de la vitesse v_2 de l'exoplanète 2 en fonction de G , M_E et R_2 .

Q3. Établir que la masse M_E de l'étoile est donnée par la relation $M_E = \frac{4\pi^2 \cdot R_2^3}{G \cdot T_2^2}$.

Q4. Vérifier que la valeur de la masse M_E déduite de cette relation est voisine de celle indiquée dans le tableau de données.

Q5. En utilisant la troisième loi de Kepler et les données R_1 , R_2 et T_2 relatives aux exoplanètes, déterminer la valeur de la période T_1 exprimée en jours terrestres.

2. Mesure expérimentale de la période de révolution T_1 de l'exoplanète 1 Le satellite TESS utilise une caméra pour détecter des exoplanètes. Lorsqu'une exoplanète passe entre l'étoile et la caméra, la puissance lumineuse reçue par la caméra diminue. Ce phénomène est appelé transit planétaire et indique la présence d'une exoplanète en orbite autour de l'étoile pointée par la caméra.

On se propose de déterminer la valeur de la période T_1 de révolution de l'exoplanète 1 autour de l'étoile E en exploitant les relevés envoyés par le satellite TESS. Lors du transit de l'exoplanète 1 devant l'étoile E (schématisé sur la figure 2), on mesure la puissance lumineuse relative* P_{lum} reçue par la caméra en fonction du temps (figure 3). L'origine des dates ($t = 0$) est prise au milieu du transit.

* La puissance lumineuse relative est définie comme le rapport de la puissance lumineuse reçue par la caméra à un instant donné sur la valeur moyenne de cette puissance. C'est une grandeur sans dimension.

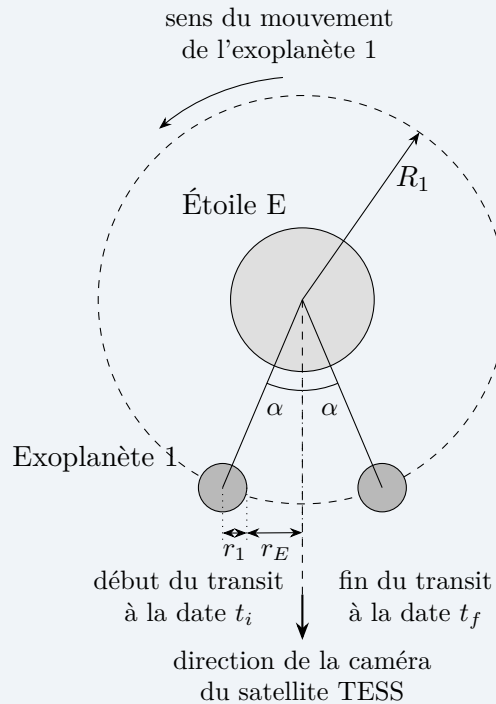


Figure 2. Positions de l'exoplanète 1 au début et à la fin de la phase de transit (le schéma n'est pas à l'échelle)

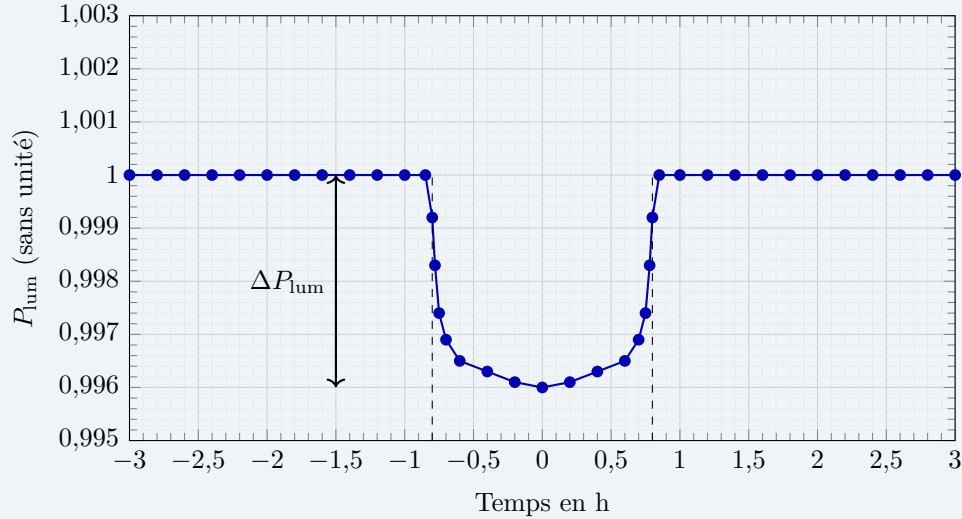


Figure 3. P_{lum} en fonction du temps lors d'un transit de l'exoplanète 1

On admet que le rayon r_1 de l'exoplanète 1, le rayon r_E de l'étoile E et la diminution ΔP_{lum} de la puissance lumineuse relative reçue par la caméra pendant le transit de l'exoplanète 1 vérifient la relation suivante :

$$\Delta P_{\text{lum}} = \left(\frac{r_1}{r_E} \right)^2$$

Q6. Indiquer qualitativement l'influence de la taille de l'exoplanète sur la diminution ΔP_{lum} de la puissance lumineuse relative reçue par la caméra au cours d'un transit.

Q7. Vérifier que le rayon r_1 de l'exoplanète 1 vaut environ $1,7 \times 10^4$ km.

Q8. En utilisant les figures 2 et 3, et sachant que l'angle α est très petit devant 1 rad, estimer la valeur de la période T_1 de révolution de l'exoplanète 1 que l'on peut déduire des observations. Commenter.

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie même si elle n'a pas abouti. La démarche suivie est évaluée et nécessite donc d'être correctement présentée.

Corrigé

1. Étude du système « TOI 270 » **Q1.** D'après la loi de gravitation universelle, l'étoile E (masse M_E) exerce sur l'exoplanète 2 (masse M_2), située à la distance R_2 de son centre, une force attractive de valeur $F = G \frac{M_E M_2}{R_2^2}$, dirigée de P vers le centre E. Dans le repère de Frenet, $\vec{u}_N$ est précisément le vecteur unitaire normal dirigé de P vers E (figure 1), donc

$$\vec{F} = G \frac{M_E M_2}{R_2^2} \vec{u}_N.$$

Q2. *Système* : l'exoplanète 2, de masse M_2 . *Référentiel* : centré sur E, axes pointés vers des étoiles lointaines, supposé galiléen. *Bilan des forces* : la seule force est l'attraction gravitationnelle $\vec{F}$ de l'étoile (interaction avec l'exoplanète 1 négligée). *Deuxième loi de Newton* : $\sum \vec{F} = M_2 \vec{a}$, soit

$$G \frac{M_E M_2}{R_2^2} \vec{u}_N = M_2 \vec{a} \implies \vec{a} = \frac{G M_E}{R_2^2} \vec{u}_N.$$

Pour un mouvement circulaire de rayon R_2 , l'accélération s'écrit dans la base de Frenet $\vec{a} = \frac{dv_2}{dt} \vec{u}_T + \frac{v_2^2}{R_2} \vec{u}_N$. Par identification : selon $\vec{u}_T$, $\frac{dv_2}{dt} = 0$, la valeur de la vitesse est constante

(mouvement uniforme, cohérent avec l'hypothèse) ; selon $\vec{u}_N$,

$$\frac{v_2^2}{R_2} = \frac{G M_E}{R_2^2} \implies v_2 = \sqrt{\frac{G M_E}{R_2}}.$$

La vitesse ne dépend pas de la masse M_2 de l'exoplanète.

Q3. Le mouvement étant uniforme, l'exoplanète parcourt le périmètre $2\pi R_2$ de son orbite pendant une période : $v_2 = \frac{2\pi R_2}{T_2}$. En égalant avec l'expression de Q2 puis en élevant au carré :

$$\frac{4\pi^2 R_2^2}{T_2^2} = \frac{G M_E}{R_2} \implies M_E = \frac{4\pi^2 R_2^3}{G T_2^2}.$$

C'est la troisième loi de Kepler, $\frac{T_2^2}{R_2^3} = \frac{4\pi^2}{G M_E}$, qui permet de « peser » l'étoile à partir du mouvement d'une de ses planètes.

Q4. Il faut convertir les données en unités du système international : $R_2 = 1,08 \times 10^7 \text{ km} = 1,08 \times 10^{10} \text{ m}$ et $T_2 = 11,4 \times 24 \times 3600 = 9,85 \times 10^5 \text{ s}$.

$$M_E = \frac{4\pi^2 \times (1,08 \times 10^{10})^3}{6,67 \times 10^{-11} \times (9,85 \times 10^5)^2} = 7,69 \times 10^{29} \text{ kg}.$$

La valeur obtenue est voisine de celle du tableau, $M_E = 7,68 \times 10^{29} \text{ kg}$ (écart de 0,1 %, dû aux arrondis), soit environ 0,4 masse solaire : TOI 270 est une naine rouge. *Ce que le correcteur attend* : les km convertis en m et les jours en secondes ; oublier l'une de ces conversions donne un résultat faux de plusieurs ordres de grandeur.

Q5. D'après la troisième loi de Kepler, pour les deux exoplanètes en orbite autour de la même étoile, $\frac{T^2}{R^3}$ est le même : $\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$, d'où

$$T_1 = T_2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{3/2} = 11,4 \times \left(\frac{6,77 \times 10^6}{1,08 \times 10^7} \right)^{3/2} = 11,4 \times (0,627)^{3/2} = 5,66 \text{ jours}.$$

Le rapport R_1/R_2 étant sans dimension, on peut garder les rayons en km et T_2 en jours : $T_1 \approx 5,7$ jours terrestres, plus courte que T_2 puisque l'exoplanète 1 est plus proche de l'étoile.

2. Mesure expérimentale de la période T_1 **Q6.** ΔP_{lum} est proportionnelle au carré du rayon r_1 de l'exoplanète (à r_E fixé) : plus l'exoplanète est grande, plus elle masque une grande fraction du disque de l'étoile (rapport des aires $\pi r_1^2 / \pi r_E^2$) et plus la diminution de puissance lumineuse est importante ; une exoplanète deux fois plus grande produit une baisse quatre fois plus forte. Les grosses planètes sont donc les plus faciles à détecter par transit.

Q7. Sur la figure 3, hors transit $P_{\text{lum}} = 1,000$ et au fond du transit $P_{\text{lum}} \approx 0,996$: on lit $\Delta P_{\text{lum}} = 1,000 - 0,996 = 4 \times 10^{-3}$. D'après la relation admise,

$$r_1 = r_E \sqrt{\Delta P_{\text{lum}}} = 2,63 \times 10^5 \times \sqrt{4 \times 10^{-3}} = 2,63 \times 10^5 \times 0,063 = 1,7 \times 10^4 \text{ km}.$$

Le rayon de l'exoplanète 1 vaut bien environ $1,7 \times 10^4 \text{ km}$ (2,6 rayons terrestres : une « mini-Neptune », qui ne cache que 0,4 % de l'étoile).

Q8. Démarche. Entre le début et la fin du transit, le rayon vecteur EP tourne de l'angle 2α (figure 2). Le mouvement étant uniforme, la durée du transit $\Delta t = t_f - t_i$ est à T_1 ce que 2α est à un tour complet 2π :

$$\frac{\Delta t}{T_1} = \frac{2\alpha}{2\pi} \implies T_1 = \frac{\pi \Delta t}{\alpha}.$$

Angle α . Au début du transit, le bord de l'exoplanète affleure le bord du disque de l'étoile vu depuis la caméra (très lointaine) : le centre de l'exoplanète est décalé de $r_E + r_1$ par rapport à l'axe E-caméra, à la distance R_1 de E (figure 2). Donc $\sin \alpha = \frac{r_E + r_1}{R_1}$, et avec $\alpha \ll 1$ rad :

$$\alpha \approx \frac{r_E + r_1}{R_1} = \frac{2,63 \times 10^5 + 1,7 \times 10^4}{6,77 \times 10^6} = 4,1 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

(les longueurs sont toutes en km ; l'approximation est légitime, $\alpha \approx 2,4^\circ$).

Durée du transit. Sur la figure 3, la puissance chute à $t_i \approx -0,8$ h et revient à sa valeur hors transit à $t_f \approx +0,8$ h (chaque carreau vaut 0,1 h) : $\Delta t = 1,6$ h. Les traits pointillés t_i et t_f du sujet sont tracés un peu au-delà de $\pm 0,8$ h : une lecture $\Delta t \approx 1,7$ h est tout aussi acceptable et conduit à $T_1 \approx 5,4$ jours.

Période.

$$T_1 = \frac{\pi \times 1,6}{4,1 \times 10^{-2}} = 1,2 \times 10^2 \text{ h} = \frac{122}{24} \approx 5,1 \text{ jours.}$$

Commentaire. La période déduite des observations, $T_1 \approx 5,1$ jours, est proche de la valeur 5,7 jours obtenue par la troisième loi de Kepler (écart relatif d'environ 10 %). L'écart s'explique par les approximations de la méthode : la lecture de t_i et t_f à $\pm 0,1$ h près (soit ± 12 % sur Δt , donc sur T_1), la valeur arrondie de r_1 , et surtout l'hypothèse que l'exoplanète passe par le centre du disque de l'étoile : si sa trajectoire apparente est décalée, la corde traversée est plus courte, le transit dure moins longtemps et T_1 est sous-estimée, ce qui va dans le sens observé. Les deux déterminations sont donc compatibles, et la méthode des transits fournit bien un ordre de grandeur correct de la période (la valeur publiée pour TOI 270 c est de 5,66 jours).

Ce que le correcteur attend : l'angle balayé pendant le transit est 2α et non α ; les longueurs de α dans la même unité ; la conversion des heures en jours pour comparer à Q5.